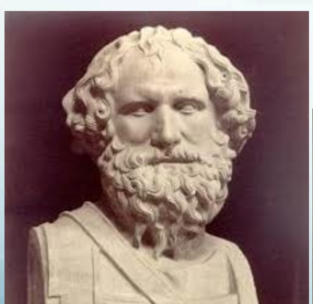
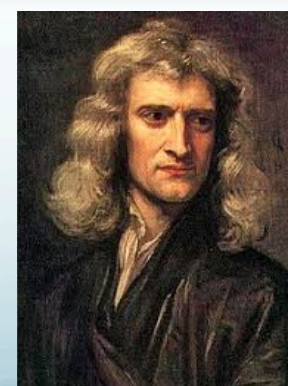
Prof.ssa Silvia Tomei

Introduzione all’analisi

Classe 4








Introduzione all’analisi

Che cos’è l’analisi matematica?

L’**analisi matematica**, detta anche **calcolo infinitesimale**, è quella parte della matematica che studia le proprietà delle funzioni reali di variabile reale

$$f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

sulla base del concetto di *limite* (operatore matematico fondamentale per conoscere il valore assunto da una funzione nell’intorno di un punto e grazie al quale possiamo stabilire a quale valore tende la funzione man mano che i valori della variabile indipendente *x* si avvicinano a quel punto.).

Introduzione all’analisi

L’analisi matematica nasce nel XVII secolo a causa della necessità di risolvere problemi essenzialmente di tre tipi:

- **Problemi di ottimizzazione**, ossia problemi in cui si chiede per quale valore una grandezza rende minima o massima una certa quantità (es. gittata massima, o cammino minimo ottico)

- **Problema della ricerca della retta tangente** ad una curva in un punto dato

- **Problema della misura** (già **Archimede** era riuscito a determinare la lunghezza di una circonferenza, l’area di un segmento parabolico, il volume di una sfera**).** Il **metodo degli indivisibili** (metodo pratico per calcolare aree e volumi) scoperto da **Keplero** 1571-1630), **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) ed **Evangelista Torricelli** (1608-1647), pur non essendo basato su una teoria rigorosa, fu decisivo per la nascita del moderno calcolo infinitesimale e influenzò gli studi dei matematici **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) che per vie diverse giunsero al concetto di derivata e di integrale.

Introduzione all’analisi

L’analisi matematica si basa pertanto sul concetto di *numero reale* e di *funzione*.

Prima di affrontare il concetto di limite diamo alcuni concetti fondamentali dei numeri reali.

Intervalli

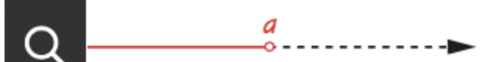
Indicati con **a** e **b** due numeri reali distinti con **a<b** diremo **intervallo** di estremi **a** e **b** l'insieme di numeri reali compresi tra **a** e **b.**

Diremo inoltre che l'intervallo

- è limitato se **a** e **b** sono due valori finiti
- è illimitato se **a** e/o **b** sono infiniti
- è chiuso se gli estremi sono inclusi nell'intervallo
- è aperto se gli estremi sono esclusi

Intervalli

Intervalli limitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Intervallo **chiuso**	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervallo **aperto**	(a, b)	$a < x < b$	
Intervallo **chiuso a sinistra e aperto a destra**	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
Intervallo **chiuso a destra e aperto a sinistra**	$(a, b]$	$a < x \leq b$	

Intervalli illimitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Chiuso, illimitato a destra	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	
Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$	$x > a$	
Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$	$x < a$	
Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	

Intorno di un punto x_0

Si dice **intorno completo** di un punto x_0 un qualsiasi intervallo aperto che contiene il punto x_0.

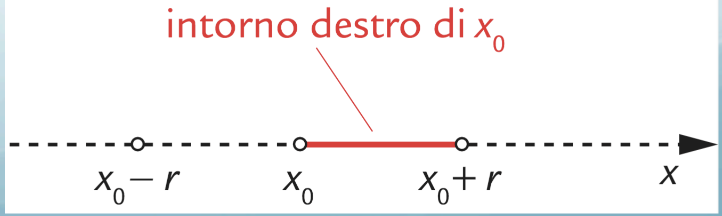
Es: intorno di $x_0=5$: (2, 8) è un intervallo che contiene 5

Invece (-3, 2) non è un intorno di 5.

Anche [-3, 2] non lo è perché è un intervallo chiuso.

Si dice **intorno destro** di un punto x_0 un qualsiasi intervallo aperto a destra che contiene il punto x_0 come estremo sinistro

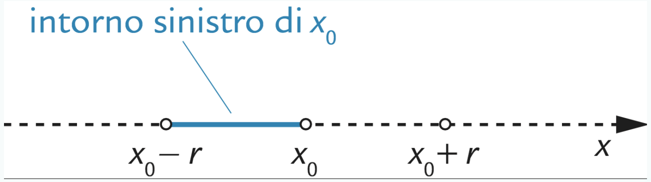
Es: intorno destro di 5: [5, 12)



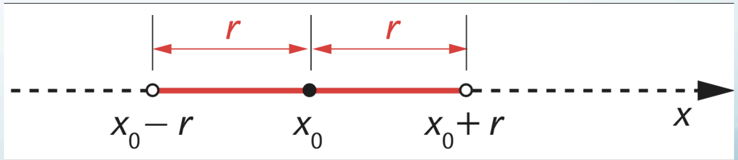
Intorno di un punto x_0

Si dice **intorno sinistro** di un punto x_0 un qualsiasi intervallo aperto a sinistra che contiene il punto x_0 come estremo destro.

Es: intorno sinistro di 5: (-10, 5]



Si dice **intorno circolare** di un punto x_0 un qualsiasi intervallo aperto del tipo $(x_0-r\ ,\ x_0+r)$



Es: intorno circolare di 5: (1, 9)

il punto x_0 deve stare sempre nel mezzo tra i due estremi

Intorni

Se aggiungiamo all'insieme dei numeri reali $\mathcal{R}$ i simboli $+\infty$ e $-\infty$, si ottiene

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$\mathcal{R}^*$ si chiama **sistema ampliato dei numeri reali**.

Possiamo allora parlare di intorno di $+\infty$ e intorno di $-\infty$.

Es. $(+6; +\infty)$ è un intorno di $+\infty$

$(-\infty; -5)$ è un intorno di $-\infty$

Esercizi

Esercizi

- scrivi un intorno completo di 4
- scrivi un intorno destro di 8
- scrivi un intorno sinistro di -7
- scrivi un intorno circolare di 6
- scrivi un intorno circolare di -10
- scrivi un intorno di $+\infty$
- scrivi un intorno di $-\infty$

Maggiorante, minorante di un insieme numerico

Consideriamo un insieme A non vuoto di numeri reali.

Definizione di maggiorante di A

Si chiama **maggiorante** di un insieme A di numeri reali un numero maggiore o uguale a tutti gli elementi di A. Se esiste un maggiorante allora l'insieme è **superiormente limitato**. I maggioranti possono appartenere o no all'insieme.

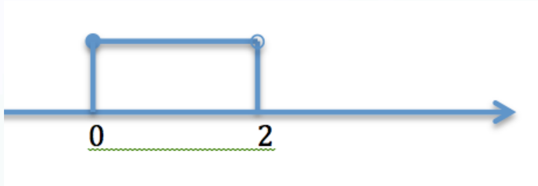
Definizione di minorante di A

Si chiama **minorante** di un insieme A di numeri reali un numero minore o uguale a tutti gli elementi di A. Se esiste un minorante allora l'insieme è **inferiormente limitato**. I minoranti possono appartenere o no all'insieme.

Maggiorante, minorante di un insieme numerico

ESEMPIO

Sia l'insieme A=[0, 2) ossia l'intervallo rappresentato dal grafico a fianco



A è superiormente limitato, infatti:

2 è un suo maggiorante, ma non è l'unico, ne esistono infiniti altri: 3, 4, $\frac{5}{2}, \sqrt{7}$…; 2 è il più piccolo dei maggioranti

A è anche inferiormente limitato, infatti:

0 è un suo minorante, ma non è l'unico, ne esistono infiniti altri: $-\frac{1}{2}$, -1, …; 0 è il più piccolo dei minoranti.

Quindi essendo l'insieme A limitato sia superiormente che inferiormente si dice **limitato**.

Insiemi limitati superiormente e inferiormente

Un insieme di numeri reali si dirà **limitato superiormente** se esiste un numero (e quindi infiniti) che risulti maggiore di tutti gli elementi dell'insieme.

Es. $(-\infty; 3)$ è limitato superiormente da 3 che è il *sup*

Un insieme di numeri reali si dirà **limitato inferiormente** se esiste un numero (e quindi infiniti) che risulti minore di tutti gli elementi dell'insieme.

Es. $(2; +\infty)$ è limitato inferiormente da 3 che è l'*inf*.

Esempio:

L'insieme dei numeri reali negativi è limitato superiormente. Infatti esiste un numero lo 0 (e quindi infiniti, tutti i numeri positivi) che risulta maggiore di tutti gli elementi dell'insieme.

L'insieme dei numeri reali positivi è limitato inferiormente. Infatti esiste un numero lo 0 (e quindi infiniti, tutti i numeri negativi) che risulta minore di tutti gli elementi dell'insieme.

Insiemi limitati superiormente e inferiormente e insiemi illimitati

Esempi di minoranti e maggioranti:

ESEMPI

a. L'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ è inferiormente limitato: un minorante è 1, ma ne esistono infiniti altri: -1, 0, $\frac{1}{2}$, ...; 1 è il minorante «più grande». L'insieme A **non** è invece limitato superiormente.

b. L'insieme $A = (-1, 2] \cup (4, 5]$ ammette, per esempio, -2 come minorante e 6 come maggiorante, quindi è sia inferiormente sia superiormente limitato. Pertanto A è un insieme limitato.

c. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali non ammette né minoranti né maggioranti in $\mathbf{R}$, quindi non è limitato né inferiormente né superiormente.

Estremo inferiore ed estremo superiore

Sia A un insieme non vuoto di **R**. Ad esempio l'intervallo limitato [3; 5).

Definizione di estremo superiore di un insieme

Si chiama **estremo superiore**, se esiste, il più piccolo dei maggioranti di A, e si indica con *sup(A)*.

Sup [3;5)=5

Ossia l'estremo superiore di un insieme limitato superiormente è il più piccolo numero che non è superato da nessun elemento dell'insieme.

(N.B. i maggioranti sono infiniti ad es: 5, 11/2, 6, … Invece l'estremo inferiore è unico.)

Definizione di estremo inferiore di un insieme

Si chiama **estremo inferiore**, se esiste, il più grande dei minoranti di A, e si indica con *inf(A)*.

Inf [3;5)=3

Ossia l'estremo inferiore di un insieme limitato inferiormente è il più grande numero che non è preceduto da nessun elemento dell'insieme.

(N.B. i minoranti sono infiniti ad es: 3, 2,9, -7, … Invece l'estremo inferiore è unico.)

Massimo e minimo

Sia A un insieme non vuoto di **R**

Definizione di massimo

Se l'estremo superiore appartiene all'insieme A allora si chiama **massimo M** dell'insieme.

Non è detto che il massimo esista sempre.

Es: (-∞; -4] - 4 è il massimo dell'insieme

(-∞; -4) non esiste il massimo, si può dire che l'insieme e limitato superiormente e il sup è -4.

Definizione di minimo

Se l'estremo inferiore appartiene all'insieme A allora si chiama **minimo m** dell'insieme.

Non è detto che il minimo esista sempre.

Es: [-7; +∞) -7 è il minimo dell'insieme, invece per l'insieme

(-5; +∞) non esiste il minimo, si può dire che l'insieme e limitato inferiormente e l'inf. è -5.

Punti di accumulazione

Definizione di punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \Re$, si dice che $x_0 \in \Re$ è un **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di x_0 cade almeno un elemento di A (e quindi infiniti), diverso da x_0.

Per gli insiemi illimitati si può parlare anche di punto di accumulazione di $+\infty$ e $-\infty$, quindi si possono cercare i punti di accumulazione di $\Re^*$.

Si chiama insieme derivato di A e si indica con A', l'insieme dei punti di accumulazione di A.

Punti isolati

I punti che appartengono ad A e **non** sono di accumulazione per A si dicono **punti isolati**.

Es. $A=(3,5)\cup\{7\}\cup(8,9)$ 7 è un punto isolato di A

Infatti esiste almeno un intorno di 7 in cui non cade alcun elemento di A, diverso da 7. Basta prendere l'intorno circolare di 7

(6.9 , 7.1)

L'unico elemento di A di questo intorno è 7, che quindi non è un punto di accumulazione per A.

Ricerca dei punti di accumulazione di un insieme

Determiniamo gli eventuali punti di accumulazione dei seguenti insiemi:

a) $A = \{-2, -1, 3\}$

b) $A = (0, 1)$

c) $A = \left\{ x \in \Re \mid x = \frac{1}{n}, con\ n \in \mathbb{N}\ e\ n \geq 1 \right\}$ N.B. scrivi gli elementi x sostiuen-do n=1 ,2 ,3 ....

d) $A = \mathbb{Q}$

Prima prova a rispondere per vedere se hai capito, poi guarda la soluzione nella prossima slide.

Soluzioni

a) A è un insieme finito pertanto è **privo di punti di accumulazione**, sono tutti punti isolati, in ogni intorno dei quali non cadono infiniti elementi dell'insieme. L'insieme derivato A' è vuoto,

b) Ogni elemento di A è di accumulazione per A, ma anche 0 e 1 sono di accumulazione (in ogni intorno destro di 0 e sinistro di 1 cadono infiniti elementi di A)

c) L'unico punto di accumulazione è 0, perché l'insieme è formato da tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore numeri naturali che, crescendo sempre più, fanno tendere a 0 il numero.

d) Tutti i punti di Q (insieme dei numeri razionali) sono di accumulazione. In particolare poiché $\mathbb{Q} \subset \Re$, tutti i punti di R sono di accumulazione per Q; in quanto in ogni intorno di un numero reale cade almeno un numero razionale. Non essendo Q né inferiormente né superiormente limitato si deduce che l'insieme derivato di Q è **Q'=R*** (cioè R con i due infiniti)

Teorema di Bolzano-Weierstrass

L'esistenza di almeno un punto di accumulazione è garantita se sono soddisfate le ipotesi del seguente teorema:

Se un sottoinsieme di **R** è **limitato e infinito**, allora possiede almeno un punto di accumulazione.