EQUAZIONI NUMERICHE FRATTE

Un'equazione si dice *fratta* quando l'incognita compare anche al denominatore.

ES: $\frac{1}{x} + 2 = x - 3 \qquad \frac{1}{x-2} + \frac{4-x}{x} = \frac{-x}{x-2}$

Il procedimento per risolvere questo tipo di equazioni è il seguente.

Es 1: $\frac{4x}{2x+1} + \frac{1-x}{4x+2} = 1$

① Scompongo in fattori i denominatori (se necessario)

$4x+2 = 2(2x+1)$

② Determino il dominio D (il C.E. (CONDIZIONI DI ESISTENZA)) dell'equazione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire all'incognita che NON annullano i denominatori: infatti per tali valori l'equazione perderebbe di significato; occorre quindi determinare le CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.) ponendo ciascun denominatore diverso da zero.

C.E. $2x+1 \neq 0 \longrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ e $4x+2 \neq 0 \longrightarrow 4x \neq -2 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Pertanto il dominio è: $D = \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$ (numeri razionali)

③ Riduciamo entrambi i membri allo stesso denominatore m.c.m. = 2 (2x+1)

$$\frac{4x \cdot 2 + (1-x)}{2(2x+1)} = \frac{2(2x+1)}{2(2x+1)}$$

④

$$\cancel{2(2x+1)}\ \frac{8x+1-x}{\cancel{2(2x+1)}} = \frac{4x+2}{\cancel{2(2x+1)}}\ \cancel{2(2x+1)}$$

sapendo che $x \neq -\frac{1}{2}$ possiamo "eliminare" i denominatori applicando il 2° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

⑤ otteniamo l'equazione $\quad 7x - 4x = 2 - 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

⑥ CONFRONTIAMO LA SOLUZIONE OTTENUTA CON IL DOMINIO (C.E.)

$x = \frac{1}{3} \longrightarrow D = \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\} \quad \boxed{x \neq -\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ è ACCETTABILE NEL C.E.

⑦ $S = \{\frac{1}{3}\}$

Es 2: $\frac{2x}{x^2+x} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$

① Scomponiamo i denominatori $\quad \frac{2x}{x(x+1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{(x+1)(x-1)}$

② analizziamo i singoli fattori dei denominatori e poniamo le condizioni di esistenza (C.E.) per determinare il dominio:

C.E. $\boxed{x \neq 0}$

$x+1 \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq -1}$

$x-1 \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq +1}$

$D = \mathbb{Q} - \{0, -1, +1\}$

③ Semplifichiamo la prima frazione: $\quad \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{(x+1)(x-1)}$

④ Calcolo il m.c.m. = $(x+1)(x-1)$

⑤ Riduco entrambi i membri allo stesso denominatore che poi possiamo "eliminare" avendo effettuato il C.E. $x \neq 0, \pm 1$

$$\frac{2(x-1)+3(x+1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} = \frac{6}{\cancel{(x+1)(x-1)}}$$

⑥ Otteniamo così l'equazione: $\quad 2(x-1) + 3(x+1) = 6$

⑦ Eseguendo i calcoli ed applicando in modo opportuno i principi di equivalenza otteniamo:

$2x - 2 + 3x + 3 = 6$

$5x = 6 + 2 - 3$

$5x = 5$

$x = 1$

⑧ Confrontiamo la soluzione ottenuta con il dominio (C.E.):

La soluzione $x = 1$ non è accettabile perché non appartiene al dominio D (C.E.), è esclusa da D (punto ②).

L'insieme delle soluzioni pertanto è $S = \emptyset$, ossia l'equazione data è impossibile.

SINTETIZZIAMO IL PROCEDIMENTO PER LA RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE FRATTA NUMERICA

1. Si scompongono i denominatori riducibili;
2. si determina il dominio dell'equazione ponendo le condizioni di esistenza (C.E.) di ciascun denominatore;
3. si riducono entrambi i membri allo stesso denominatore m.c.m. che, poi, "si elimina" con il 2° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA
4. si risolve l'equazione intera così ottenuta;
5. si confronta la soluzione con il dominio C.E., controllando se è accettabile nel C.E.
6. Si scrive l'insieme S delle soluzioni.

ESERCIZI

1. $\frac{x-5}{x^2+5x} - \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{20}{x^2-25x}$ $\qquad S=\{-1\}$

2. $\frac{2}{x+5} = \frac{1}{x+1}$ $\qquad S=\{3\}$

3. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{x-1}$ $\qquad S=\emptyset$

4. $\frac{x+2}{x} + \frac{3x+1}{1-x} = \frac{1}{x^2-x} - \frac{2x}{x-1}$ $\qquad S=\emptyset$

5. $\frac{1}{y^2-4y+4} + \frac{1}{y^2-4} - \frac{2}{y^2+4y+4} = 0$ $\qquad S=\{+\frac{2}{3}\}$

6. $\frac{2x}{x+1} - \frac{2x}{x-2} = \frac{5x+3}{x^2-x-2} - \frac{3}{x-2}$ $\qquad S=\{0\}$

7. $\frac{3}{x-x^2} + \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x^2-2x}$ $\qquad S=\emptyset$

8. $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{1-x} = -\frac{3}{2}$ $\qquad S=\{3\}$