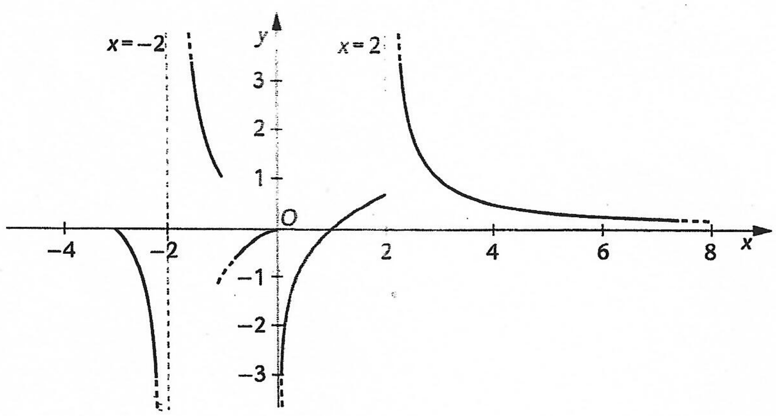
PROVA DI VERIFICA **Continuità**

Fila A	Cognome	Nome ....
Tempo: 2 ore	Classe	Data ....

Analizza il grafico della funzione $f(x)$ e classifica i punti di discontinuità:



....

....

Vero o falso?

1 le funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ sono continue nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ V F

2 la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x \neq 0 \\ -1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ presenta nel punto $x = 0$ una discontinuità eliminabile V F

3 le funzioni $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$ e $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ presentano in $x = 2$ un punto di salto V F

4 la funzione $f(x) = \frac{x^2+4}{x^3-x}$ presenta asintoti verticali, ma non orizzontali V F

5 la funzione $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{3x-2}$ presenta solo un asintoto obliquo V F

6 la funzione $f(x) = \frac{5x^2-3x+2}{x^2-x+3}$ presenta solo un asintoto orizzontale V F

Determina i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

7 $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$

8 $f(x) = 5^{\frac{1}{x}} \frac{|x-5|}{x-5}$

9 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{per } x < 0 \\ +1 & \text{per } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

10 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{2}{3}} x & \text{per } x > 0 \\ 4^{\frac{1}{x}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni:

11 $f(x) = \frac{4x^2-x+1}{3x}$

12 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{5x}$

13 $f(x) = \ln(x+1) + 3x$

14 **Traccia il grafico probabile della seguente funzione:**

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$$

DETERMINA I PUNTI DI DISCONTINUITA' DELLE SEGUENTI FUNZIONI

(7) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$

$D=\ x^2+3x+2\neq 0$
$(x+2)(x+1)\neq 0$
$x\neq -2 \quad x\neq -1$

$D=\mathbb{R}-\{-2,-1\}$

$f(x)$ è continua $\forall x\in D$.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}=\frac{-6}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ PUNTO DI DISCONTINUITA' DI 2ª SPECIE

(e $x=-1$ ASINTOTO VERTICALE)

$$\lim_{x\to -2^\mp}\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}\ \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to -2^\mp}\frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\lim_{x\to -2^\mp}\frac{x-3}{x+1}=\frac{-2-3}{-2+1}=\frac{-5}{-1}=5$$

$x=-2$ PUNTO DI DISCONTINUITA' DI 3ª SPECIE (ELIMINABILE)

---

(8) $f(x)=5^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{|x-5|}{x+5}$

$x\neq 0,\ x\neq -5$
$D=\mathbb{R}-\{0,-5\}$

$$f(x)=\begin{cases}5^{1/x} & \text{se } x\geq 5\\ -5^{1/x} & \text{se } x<5\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 5^+}5^{1/x}=5^{1/5^+}=\sqrt[5]{5} \qquad \lim_{x\to 5^-}-5^{1/x}=-\sqrt[5]{5}$$

$x=5$ PUNTO DI DISCONTINUITA' DI 1ª SPECIE (SALTO)

$$\lim_{x\to 0^-}-5^{\frac{1}{x}}=-5^{\frac{1}{0^-}}=-5^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}-5^{1/x}=-5^{1/0^+}=-5^{+\infty}=-\infty$$

$x=0$ PUNTO DI DISCONTINUITA' DI 2ª SPECIE

---

(9) $f(x)=\begin{cases}e^x-1 & \text{se } x<0\\ +1 & \text{se } x=0\\ x^2+2 & \text{se } x>0\end{cases}$

$D=\mathbb{R}$, la funzione è definita in $x=0$, $f(0)=+1$, ma NON E' CONTINUA in tale punto

$$\lim_{x\to 0^-}e^x-1=e^{0^-}-1=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}x^2+2=2$$

$\Rightarrow$ $x=0$ PUNTO DI SALTO o DISCONTINUITA' DI 1ª SPECIE

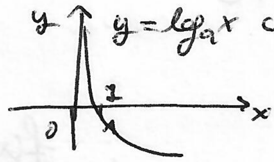
(10)

$$f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{2}{3}} x & \text{se } x>0\\ 4^{1/x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

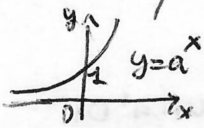
$f(0)$ non esiste, non è definita in $x=0$

$D=R-\{0\}$

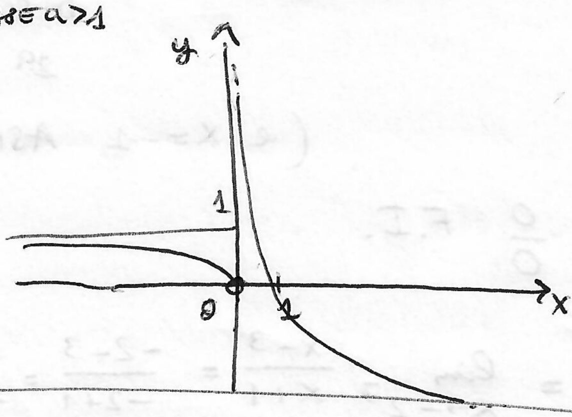
$$\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 0^+ = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0^-} 4^{1/x} = 4^{1/0^-} = 4^{-\infty} = 0$$



$x=0$ è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 2ª SPECIE



$$\left(\lim_{x\to -\infty} 4^{1/x} = 4^{\frac{1}{-\infty}} = 4^0 = 1\right.$$

$y=1$ ASINT. ORIZZ.)

(11)

DETERMINA GLI ASINTOTI

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3x}$$

$D=R-\{0\}$

$3x\neq 0 \quad x\neq 0$

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{4x^2-x+1}{3x}=\frac{1}{0}=\pm\infty$$

$x=0$ ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-x+1}{3x}=\pm\infty$$

NON CI SONO ASINTOTI ORIZZONTALI

($\frac{\pm\infty}{\infty}$ F.I) POI RACCOLGO

E' VERIFICATA LA CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DELL'ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m \text{ se } \exists \text{ finito} \qquad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=q \text{ se } \exists \text{ finito}$$

$y=mx+q$ ASINTOTO OBLIQUO

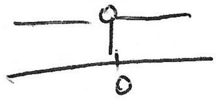
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+1}{3x^2}=\frac{4}{3}=m$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2-x+1}{3x}-\frac{4}{3}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{4x^2}-x+1-\cancel{4x^2}}{3x}\right]=-\frac{1}{3}=q$$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ ASINTOTO OBLIQUO

(12) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{5x}$ $\quad x^2+4 \geq 0 \quad \forall x \in R$

$5x \neq 0 \quad x \neq 0$



$D=R-\{0\}$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2+4}}{5x} = \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty$ $\quad X=0$ ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{5x} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I. $\quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{25x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x^2}(1+\cancel{4/x^2}^{\,0})}{25\cancel{x^2}}} = \frac{1}{5}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{5x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\cancel{4/x^2}^{\,0}}}{5\cancel{x}} = -\frac{1}{5}$ $\quad$ o $\quad \lim_{x\to -\infty} (-)\sqrt{\frac{\cancel{x^2}(1+4/x^2)}{25\cancel{x^2}}} = -\frac{1}{5}$

LA RETTA $y=\frac{1}{5}$ è ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

LA RETTA $y=-\frac{1}{5}$ è ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO

---

(13) $f(x)=\ln(x+1)+3x$ $\quad$ DOMINIO $\quad D=(-1,+\infty)$

$x+1>0 \quad x>-1$

$\lim_{x\to -1^+} [\ln(x+1)+3x] = \ln 0^+ -3 = -\infty$ $\quad$ LA RETTA $X=-1$ è ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x\to +\infty} [\ln(x+1)+3x] = +\infty$ $\quad$ NON ESISTE ASINTOTO VERTICALE (E NEANCHE OBLIQUO PROVA TU A VERIFICARE $q=+\infty$)

---

(14) TRACCIA IL GRAFICO PROBABILE

15. Traccia il grafico probabile della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$$

- $D = \mathbf{R} - \{+1, +2\}$
- Poiché $[f(x) \neq f(-x) \wedge f(-x) \neq -f(x)] \rightarrow$ la funzione non è simmetrica né rispetto all'asse y né rispetto all'origine degli assi.
- Eventuali intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+1=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \text{il grafico non interseca l'asse } x \text{ in alcun punto.}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=+\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{il grafico interseca l'asse } y \text{ nel punto di coordinate } \left(0, +\frac{1}{2}\right)$$

- Segno della funzione

$\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} > 0$ Analizziamo il segno di ogni fattore:

$x^2+1>0 \Leftrightarrow (\forall x) \in \mathbf{R}$

$x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>2$

$f(x)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>2$

$f(x)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$

- Studio della funzione agli estremi del dominio e in corrispondenza dei punti di discontinuità:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = 1^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = 1^-$$

La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = +\infty \wedge \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = -\infty \wedge \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = +\infty$$

Le rette $x = +1$ e $x = +2$ sono asintoti verticali.

- Eventuali intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} \\ y = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = +1 \end{cases}$$

Il grafico della funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto di coordinate $\left(+\frac{1}{3}, +1\right)$

- Grafico