ESERCIZI SULLA CIRCONFERENZA SVOLTI - CLASSE TERZA

Esercizio 0. Stabilire se le equazioni $x^2+y^2-2x+3y+4=0$ ***e*** $2x^2+2y^2-2x+6y-3=0$ ***rappresentano una circonferenza e in caso affermativo trovare centro e raggio.***

Soluzione. Occorre imporre $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c>0$, quindi 1 + $\frac{9}{4}$ - 4 = $-\frac{3}{4}$ <0, quindi non è una circonferenza. La seconda equazione, dividendo tutto per 2 diventa: $x^2+y^2-x+3y-\frac{3}{2}=0$ e quindi $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=4>0$, è una circonferenza con centro C($\frac{1}{2}$;$-\frac{3}{2}$) e raggio r=$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}=\sqrt{4}=2$.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di k l'equazione $x^2+y^2+2kx-4y-k+6=0$ ***rappresenta una circonferenza. Se k=5 è un valore per cui l'equazione data rappresenta una circonferenza, determinare centro e raggio della circonferenza.***

Soluzione. Occorre imporre $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c>0$, quindi $k^2+k-2>0$, pertanto l'equazione rappresenta una circonferenza per $k<-2 \vee k>1$. Se *k*=5, l'equazione della circonferenza è $x^2+y^2+10x-4y+1=0$ con centro C(-5, 2) e raggio r = $2\sqrt{7}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della circonferenza di centro C(-2;0) e raggio r=3.

Soluzione. L'equazione della circonferenza è $(x+2)^2+(y-0)^2=9$ ossia $x^2+y^2+4x-5=0$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione della circonferenza avente come diametro il segmento di estremi A(5, -3), B(1,−1).

Soluzione. Il centro è il punto medio del segmento di estremi A, B: C(3, -2). Il raggio è r=$\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}}=\sqrt{5}$. L'equazione è $(x-3)^2+(y+2)^2=5$ ossia $x^2+y^2-6x+4y-7=0$.

Esercizio 4. Data la circonferenza $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ determinare se il punto P(5,3) è esterno, interno o appartiene alla circonferenza. ***Soluzione.*** *Metodo algebrico*: si sostituiscono le coordinate di P nell'equazione della circonferenza se è un numero >0 allora P è esterno, se =0 P è sulla circ., se <0 P è interno. In questo caso 25+9-10+12-20=16>0, P è esterno. *Metodo geometrico*: distanza centro-punto: se è maggiore del raggio è esterno (se minore del raggio P è interno, se = al raggio P appartiene alla circ.): C(1; -2), CP=$\sqrt{(5-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{41}$ e r=$\sqrt{1+4+20}=5$, poiché $\sqrt{41}$>5 allora P è esterno.

Esercizio 5. Determinare per quali valori di k la retta $y=2x-k$ ***è esterna (tangente, secante) alla circonferenza di equazione*** $x^2+y^2=4$. ***Soluzione***. Si mettono a sistema il fascio improprio di rette $y=2x-k$ con la circonferenza $x^2+y^2=4$ e si trova l'equazione risolvente: $5x^2+4xk+k^2-4=0$. Se voglio che la retta sia esterna si impone il $\Delta < 0$, in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 4k^2 - 5k^2 + 20 < 0$, e risolvo la disequazione di secondo grado ottenendo $k < -2\sqrt{5} \vee k > 2\sqrt{5}$. (Si impone $\Delta = 0$ se la voglio tangente, $\Delta > 0$ se la voglio secante).

Esercizio 6. Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti A(0, 2), B(4, 4), C(6, 2).

Soluzione. ***Metodo geometrico:*** il centro *C'* si ottiene intersecando l'asse del segmento AC (A e C sono punti con la stessa ordinata quindi l'asse del segmento è parallelo all'asse *y* e avrà equazione *x*=3) con l'asse del segmento BC ($x - y - 2 = 0$), si risolve quindi il sistema (P(*x*, *y*) è un generico punto dell'asse): $\begin{cases} \overline{AP} = \overline{CP} \\ \overline{BP} = \overline{CP} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = 3 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y-2)^2 \end{cases}$ e si trova C'(3, 1). Il raggio è r= $\overline{AC'} = \sqrt{10}$. L'equazione è $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ ossia $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$, essendo $c = 0$, la circonferenza passa per l'origine.

Metodo algebrico: si sostituiscono le coordinate dei tre punti al posto di *x* e *y* nell'equazione generica della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e si risolve il sistema determinando i coefficienti *a*, *b*, *c* della circonferenza: $a = -6$, $b = -2$, $c = 0$.

Esercizio 7. Data la circonferenza di centro C(−5, 2) e passante per P(−1,−3), determinare l'equazione della retta tangente a in P.

Soluzione. ***Metodo geometrico 1***: la retta tangente passa per P e, essendo perpendicolare al raggio, ha coefficiente angolare uguale a $m_\perp = -\frac{1}{m_{CP}} = \frac{4}{5}$ (con $m_{CP} = \frac{-3-2}{-1+5} = -\frac{5}{4}$). Allora scrivo il fascio di rette per P: $y - y_P = m_\perp (x - x_P)$ quindi la sua equazione è $y + 3 = \frac{4}{5}(x+1)$ → $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$ → $4x - 5y - 11 = 0$.

Metodo geometrico 2: calcolo il raggio CP= $\sqrt{41}$ e poi impongo la distanza del centro dal fascio di rette passanti per P uguale al raggio: $\frac{|-5m - 2 - 3 - m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{41}$, moltiplicando per $\sqrt{m^2+1}$ si ha: $|-6m - 5| = \sqrt{41}\sqrt{m^2+1}$ ed elevando entrambi i membri a quadrato si ottiene: $(-6m-5)^2 = 41 \cdot (m^2+1)$ → $25m^2 - 40m + 16 = 0$ → $m = \frac{4}{5}$ e quindi la retta tangente in P $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$.

Metodo analitico: Trovo l'equazione della circonferenza di centro *C(−5, 2)* e raggio CP= $\sqrt{41}$: $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 12 = 0$; scrivo il fascio di rette per P: $y + 3 = m(x+1)$ e imposto il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 4y - 12 = 0 \\ y + 3 = m(x+1) \end{cases}$ lo risolvo imponendo $\mathbf{\Delta = 0}$ e trovo *m*.

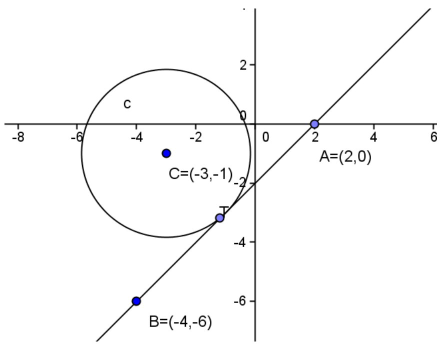
Esercizio 8. Determinare le coordinate dei punti P, Q di intersezione della circonferenza $\gamma: x^2+y^2-2x-6y-6=0$ ***con la retta r : x – y – 2 = 0. E' possibile determinare la lunghezza della corda PQ senza fare uso delle coordinate degli estremi? Spiega.***

Soluzione. Si risolve il sistema tra la retta e la circonferenza per sostituzione, ad esempio ponendo $x = y + 2$ Si trovano i punti P(5, 3), Q(1, -1). Dato che il centro di γ è C(1, 3) ed il raggio misura 4, indicata con H la proiezione ortogonale di C sulla retta r, per determinare la lunghezza della corda PQ basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo CHP, retto in H: $\overline{PQ}=2\cdot\overline{PH}=2\cdot\sqrt{raggio^2-d^2(C,r)}=2\cdot\sqrt{16-8}=4\sqrt{2}$.

Esercizio 9. Determinare l'equazione della circonferenza tangente alla retta t : x−y−1 = 0 nel punto T (2,−1) e passante per A(−4,−3).

Soluzione. Il centro C si trova intersecando la retta perpendicolare a *t* e passante per T (x + y − 1 = 0) con l'asse del segmento AT (3 x + y + 5 = 0): si trova C(−3, 4). Il raggio `e r = $\overline{CT}=\sqrt{50}$, quindi l'equazione della circonferenza è $(x+3)^2+(y-4)^2=50$ ossia $x^2+y^2+6x-8y-25=0$.

Esercizio 10. Nella figura la circonferenza γ di centro C(-3,-1) è tangente alla retta passante per A(2,0) e B(-4,-6). Scrivi l'equazione di γ.



Soluzione. La retta tangente t passa per A e B, quindi ha equazione $t : y = \ x - 2$, ovvero $t : x - y - 2 = 0$. Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza di C da tale retta: r=$\dfrac{|-3-(-1)-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}$. L'equazione cercata, pertanto, è γ : $(x+3)^2+(y+1)^2=8$. Il punto T di tangenza si trova intersecando la retta $y = x - 2$ con la retta passante per C(−3,−1) e perpendicolare alla retta tangente, di equazione $y=-x-4$; si trova T (−1,−3).

Esercizio 11. Data la circonferenza di centro C(2,−3) e raggio $\sqrt{8}$***, determinare le equazioni delle rette parallele alla retta*** $x - y = 0$ ***e tangenti a γ.***

Soluzione. Le parallele alla retta assegnata sono del tipo $y = x + k$ *(fascio di rette improprio)*; imponendo che C abbia distanza pari a $\sqrt{8}$ dalla retta generica si trova: $\dfrac{|2-(-3)+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}\Rightarrow|5+k|=4|$, da cui $k_1 = -1$, $k_2 = -9$.

Le rette cercate, pertanto, sono $y = x - 1$ e $y = x - 9$.

Esercizio 12. Determinare le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto P(7,0) alla circonferenza $x^2+y^2-2x-4y-15=0$***. Si calcolino anche le coordinate dei punti A, B di tangenza e si determini l'area del triangolo ABP.***

Soluzione. Metodo geometrico: il centro di γ è C(1, 2), mentre il suo raggio misura $2\sqrt{5}$. Per determinare le tangenti scriviamo l'equazione della retta generica per P, *t* : $y=m(x-7)$ ed imponiamo che risulti:

d(C, t)=raggio → $\frac{|m-2-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}$: si trova m_1= - 2 e m_2=$\frac{1}{2}$, da cui $2x+y-14=0$ e $x-2y-7=0$. Per determinare i punti di tangenza si risolvono due sistemi tra la circonferenza e ciascuna delle rette tangenti. Si nota che l'equazione risolvente dei due sistemi è di secondo grado con il **Δ = 0** e si otterranno quindi i punti A(5 ,4) e B(3,-2) . Per determinare l'area di ABP si osserva che il triangolo è isoscele e l'altezza relativa alla base AB coincide con la mediana PM relativa ad AB. Si calcola quindi il punto medio M di AB: M(4,1), PM= $\sqrt{10}$ e AB= $2\cdot\sqrt{10}$. Quindi l'area di ABP è A = $\frac{PM\cdot AB}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{\cancel{2}}$= 10.

Metodo analitico: scriviamo innanzitutto il fascio di rette passanti per P: $y=m(x-7)$ e poi intersechiamo il fascio di rette per P con la circonferenza infine imponiamo il **Δ = 0**. Sistema: $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y-15=0\\ y=m(x-7)\end{cases}$ risolviamo per sostituzione $x^2+(m(x-7))^2-2x-4m(x-7)-15=0$ sviluppando troviamo: $x^2+m^2x^2+49m^2-14m^2x-2x-4mx+28m-15=0$ → $x^2(1+m^2)-2x(7m^2+2m+1)+49m^2+28m-15=0$ (*) a questo punto calcoliamo il **Δ** (che risulterà essere in funzione di *m*): $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(7m^2+2m-1)^2-(1+m^2)(49m^2+28m-15)=0$

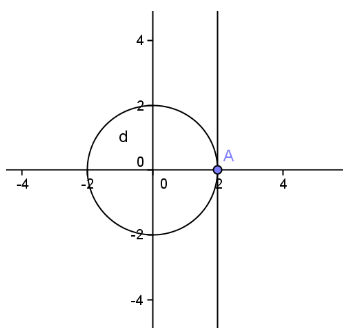
da cui calcolando le soluzioni dell'equazione $-16m^2-24m+16=0$ e dividendo per -8 abbiamo $2m^2+3m-2=0$ e quindi risulta m_1= - 2 e m_2=$\frac{1}{2}$.

Per determinare le coordinate dei punti di tangenza basta sostituire in (*) prima m_1 poi m_2 e si trovano rispettivamente due equazioni $x^2-10x+25=0$ da cui x=5 e $x^2-6x+9=0$ da cui x=3, le rispettive *y* si ottengono sostituendole nelle equazioni delle rette tangenti.

Esercizio 13. Determinare l'equazione della circonferenza avente centro in C(-2,6) e tangente all'asse x.

Soluzione. Osservato che l'asse *x* ha equazione *y* =0. Per determinare il raggio possiamo calcolare la distanza del centro C all'asse *x*. Il disegno, però, fa capire bene che la circonferenza passa dal punto H(-2,0), per cui il raggio è CH=6; l'equazione, pertanto risulta essere: $(x+2)^2+(y-6)^2=6^2 \Rightarrow x^2+y^2+4x-12y+4=0$.

Esercizio 14. Determinare l'equazione della retta tangente condotta dal punto P(2,0) alla circonferenza $x^2+y^2=4$.



Soluzione. In questo caso la retta tangente sarà x=2. Se imponiamo la distanza dal centro uguale al raggio si ottiene una equazione impossibile. Questo significa che la retta tangente passante per P è la retta esclusa del fascio (m infinito) e quindi x=2. Stessa cosa se risolvo il sistema tra il fascio di rette per P e la circonferenza: il sistema risulta impossibile perché sparisce la m (viene 4=0) allora la retta tangente possiamo dire che esiste (poiché P appartiene alla circonferenza) ed è la retta parallela all'asse delle y passante per P (m = ∞).

Esercizio 15. Determinare l'equazione della retta tangente condotta dal punto P(1,0) alla circonferenza $x^2+y^2=4$***.*** ***Soluzione.*** Poiché P è interno alla circonferenza non esistono rette tangenti per P alla circonf. Se risolviamo il sistema circonferenza-fascio di rette per P otteniamo un'equazione risolvente impossibile, ma non perché *m,* sparisce come nel caso dell'es.14, qui si otterrà l'equazione in *m:* $3m^2+4=0$ che è impossibile in *R*.

Esercizio 16. Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti A(1, -2) e B(0,-1) e avente il centro sulla retta $3x-y=0$***.***

Soluzione. Il centro si trova nel punto di intersezione tra l'asse di AB e la retta data. L'asse del segmento AB si trova ponendo PA=PB ossia $PA^2=PB^2$ $(x-1)^2+(y+2)^2=(x-0)^2+(y+1)^2$ da cui facendo i calcoli si ottiene x-y-2=0. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ si ottiene C(-1, -3). Il raggio è r=CB= $\sqrt{5}$ e 'equazione della circonferenza $(x+1)^2+(y+3)^2=5 \Rightarrow x^2+y^2+2x+6y+5=0$.