ELEMENTI DI GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

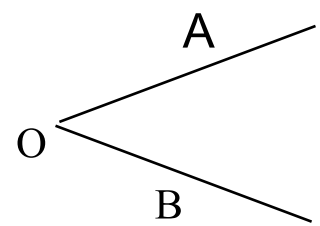
La goniometria si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni.

La trigonometria studia i procedimenti di calcolo che permettono di determinare la misura degli elementi di un triangolo, noti alcuni di essi.

L’**angolo** è la parte di piano individuata da due semirette a e b che hanno la stessa origine.

Angolo

L'**angolo** è la parte di piano individuata da due semirette a e b che hanno la stessa origine.



In realtà due semirette con la stessa origine dividono il piano in due part: quindi con la notazione AÔB si può registrare un'ambiguità.

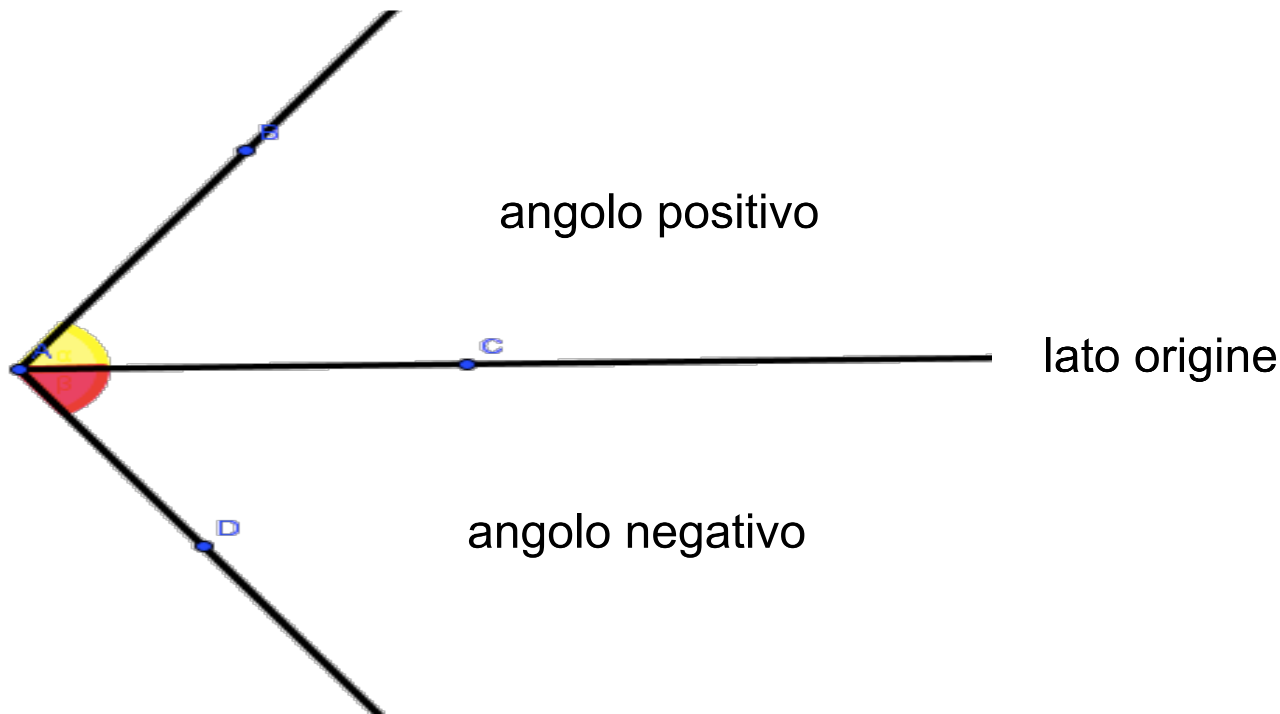
Essa scompare se usiamo la definizione di **angolo orientato.**

Angoli orientati

Un angolo si dice **orientato** quando è stato scelto uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.

Un angolo orientato si dice positivo quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario;

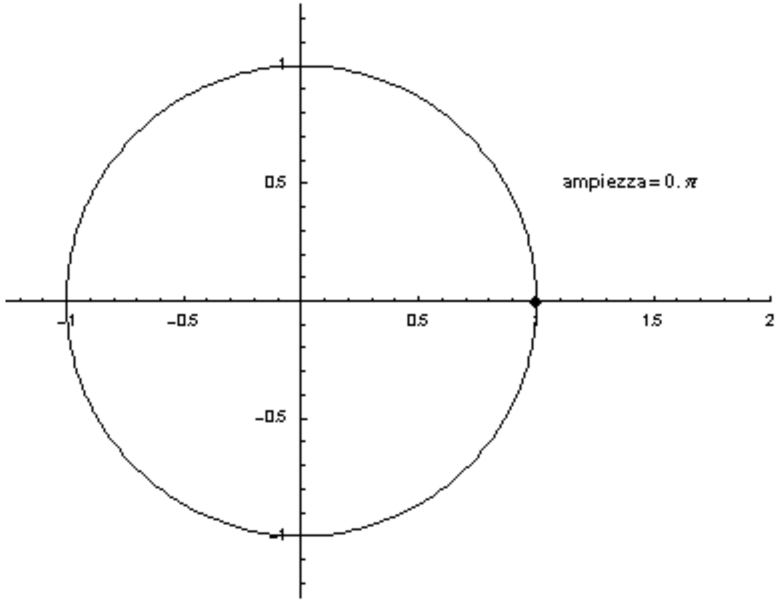
si dice negativo quando la rotazione è in senso orario.

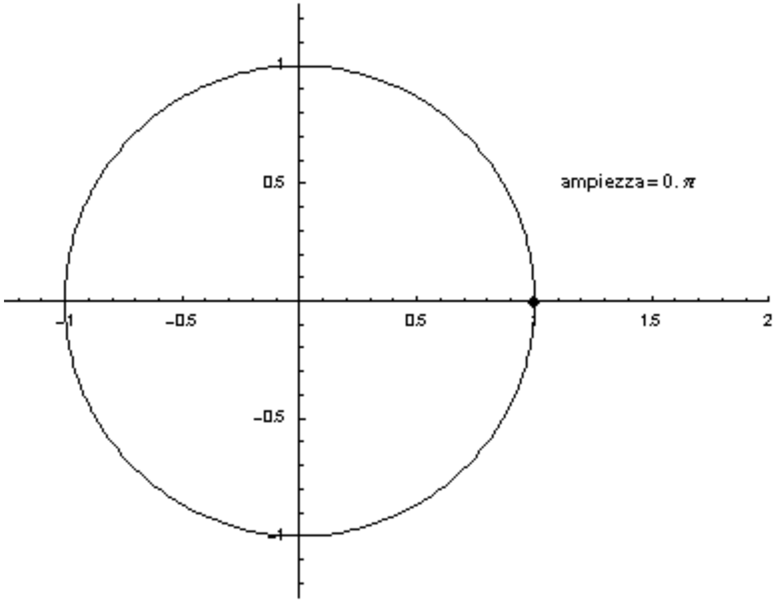


Angoli orientati 2

Un angolo orientato varia da -∞ a +∞

Applet da http://www.lorenzoroi.net/mathematica/funzGonio/intro/index.html





LA MISURA DEGLI ANGOLI

Nel sistema sessagesimale, l'unità di misura degli angoli è il grado sessagesimale, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

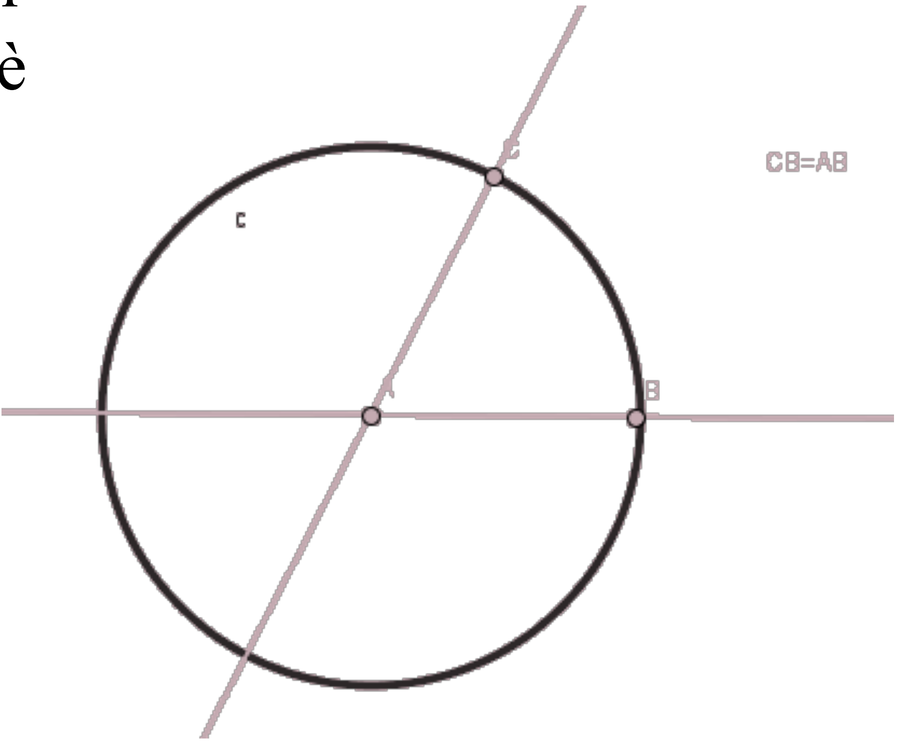
Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi, secondi è il più antico, ma presenta il problema di non utilizzare un sistema decimale e di avere quindi procedimenti di calcolo complicati

Esempio: $30° \, 20' \, 54'' + 2° \, 45' \, 24'' = 32° \, 65' \, 78'' = 33° \, 6' \, 18''$

Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura il **radiante**:

Data una circonferenza, si chiama **radiante** l’angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Quindi la misura in radianti di un angolo al centro non è altro che il rapporto tra la misura dell’arco sotteso dall’angolo e la misura del raggio



Misura degli angoli in radianti

angolo giro $2\,\pi\,r\,/\,r = 2\,\pi$

angolo piatto π

angolo retto $\pi\,/\,2$

Relazione tra gradi e radianti

$$\alpha° = (360° \cdot \alpha_{rad})\,/\,2\,\pi$$

$$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\,\pi$$

$$\alpha_{rad} = (\alpha° \cdot 2\,\pi)\,/\,360°$$

LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

La **circonferenza goniometrica** è una circonferenza che viene rappresentata in un piano cartesiano con il centro nell'origine degli assi e il raggio di lunghezza uguale a 1

$$x^2 + y^2 = 1$$

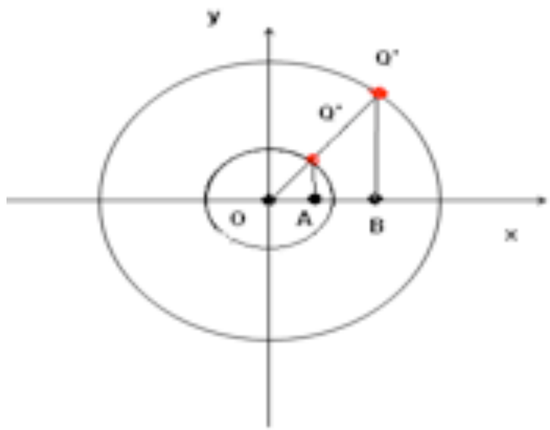
Il punto A (1, 0) si dice origine degli archi

FUNZIONI GONIOMETRICHE

SENO E COSENO

- *DEFINIZIONE*
- *C (cos α, sen α)*
- *VARIAZIONI E RELAZIONI*
- *GRAFICI*

Funzioni seno e coseno

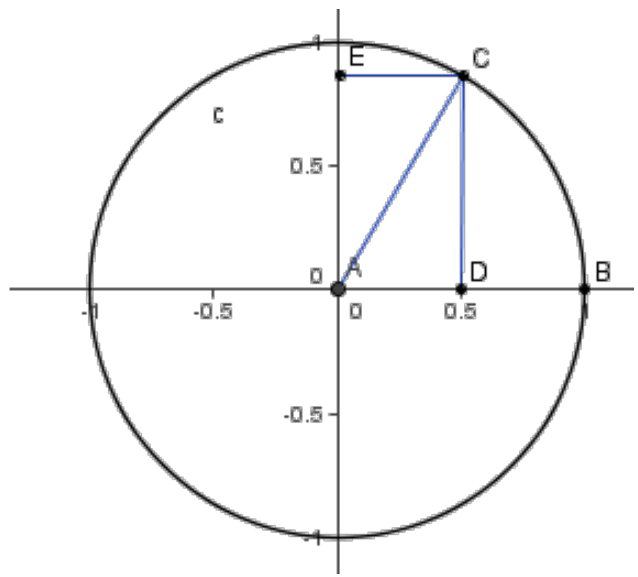


- Se si considerano i due triangoli OQ’A e OQB, dove A e B sono e relative proiezioni di Q’ e Q sull’asse x, cosa si nota? Cos’hanno in comune?

DEFINIZIONE

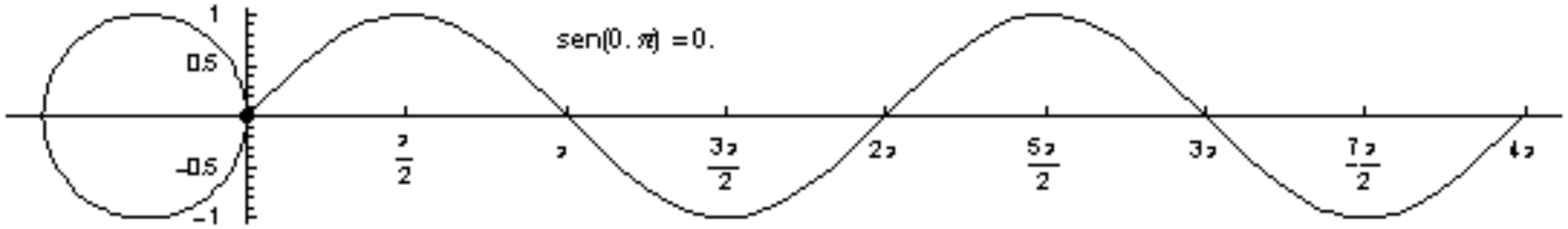
Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato [illegible].

Definiamo coseno e seno dell'angolo [illegible] le funzioni che ad [illegible] associano rispettivamente il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto di intersezione tra il raggio vettore e la circonferenza stessa

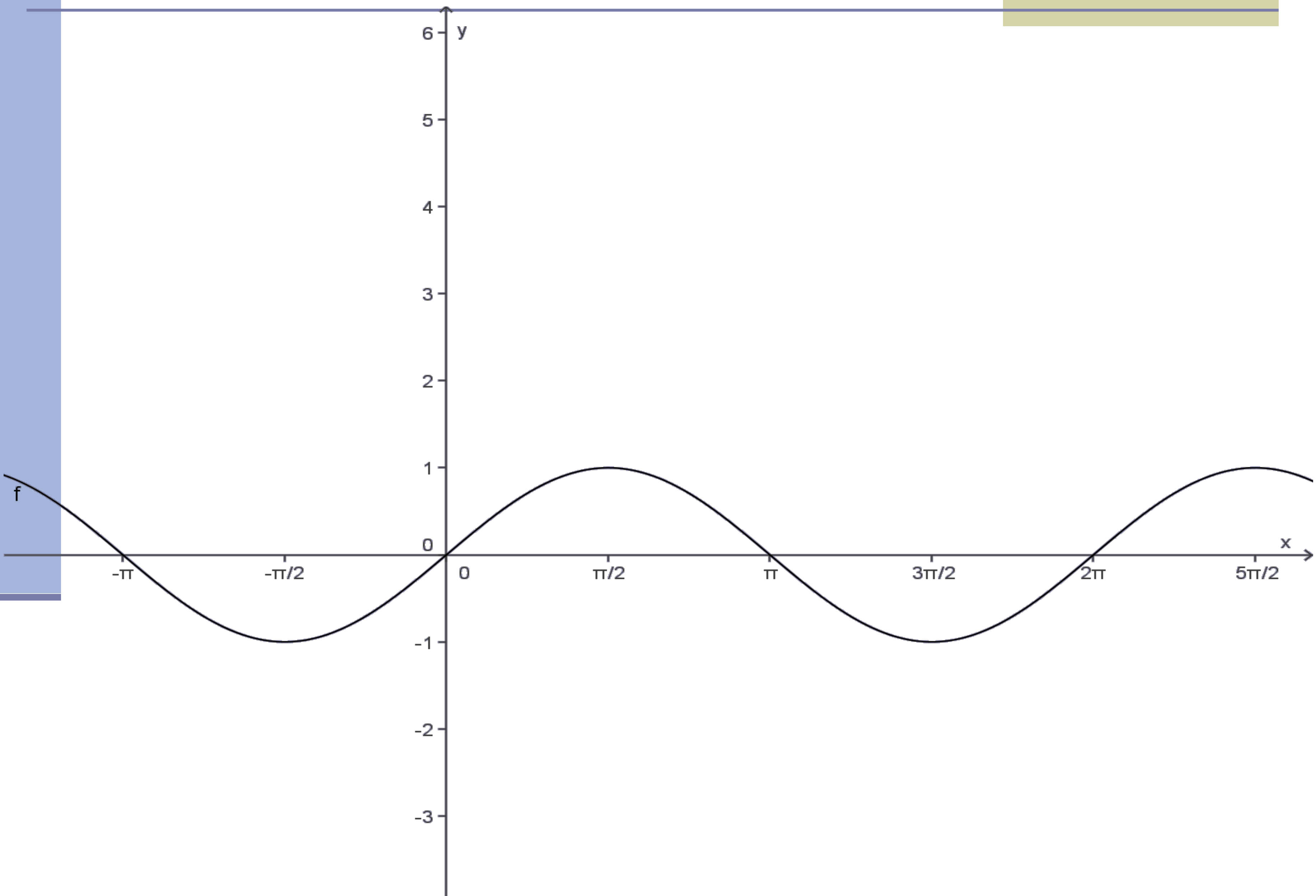


VARIAZIONE

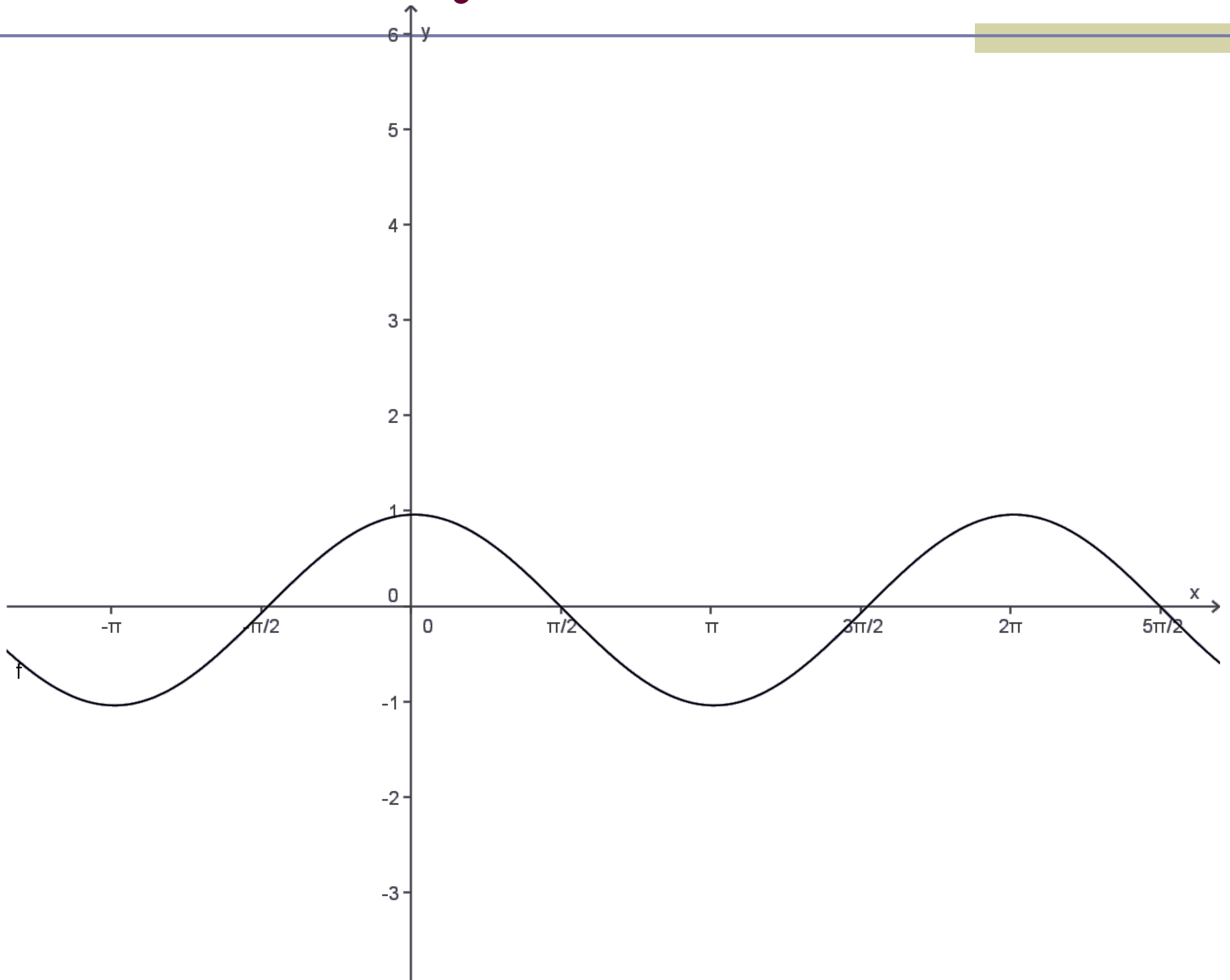
- Entrambe le funzioni assumono tutti i valori compresi fra -1 e 1



Y = SEN X



y = cos x



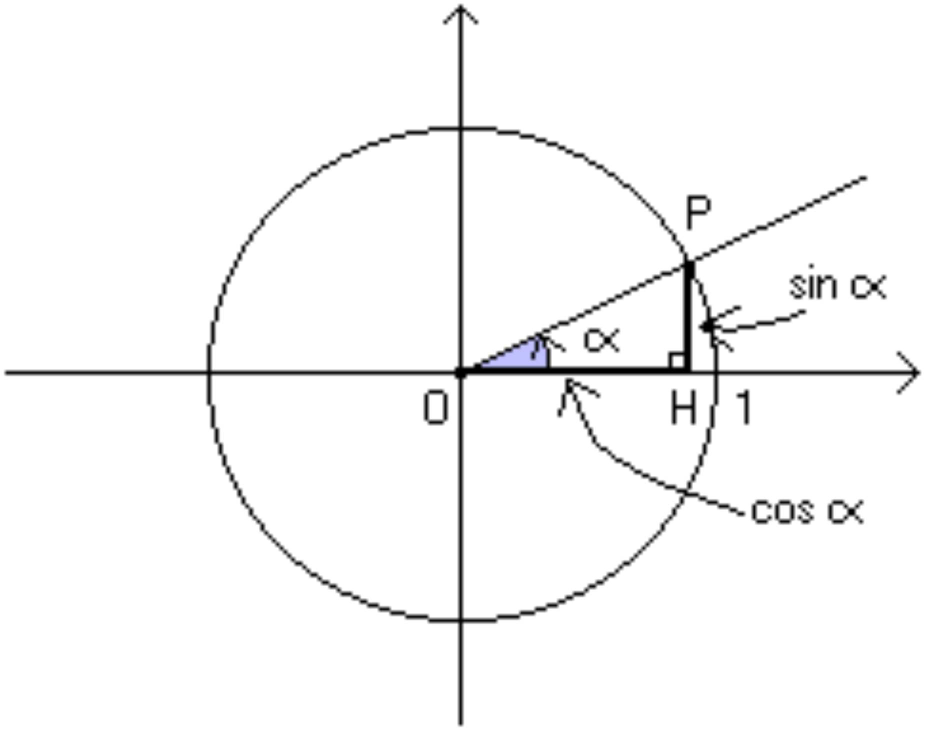
IL PERIODO DELLE FUNZIONI SENO E COSENO

$$\text{sen}\,(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,(\alpha + 2k\pi) = \cos\,\alpha \qquad \text{con } k \in Z$$

LA PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE

$$\cos^2 \alpha + \mathrm{sen}^2 \alpha = 1$$

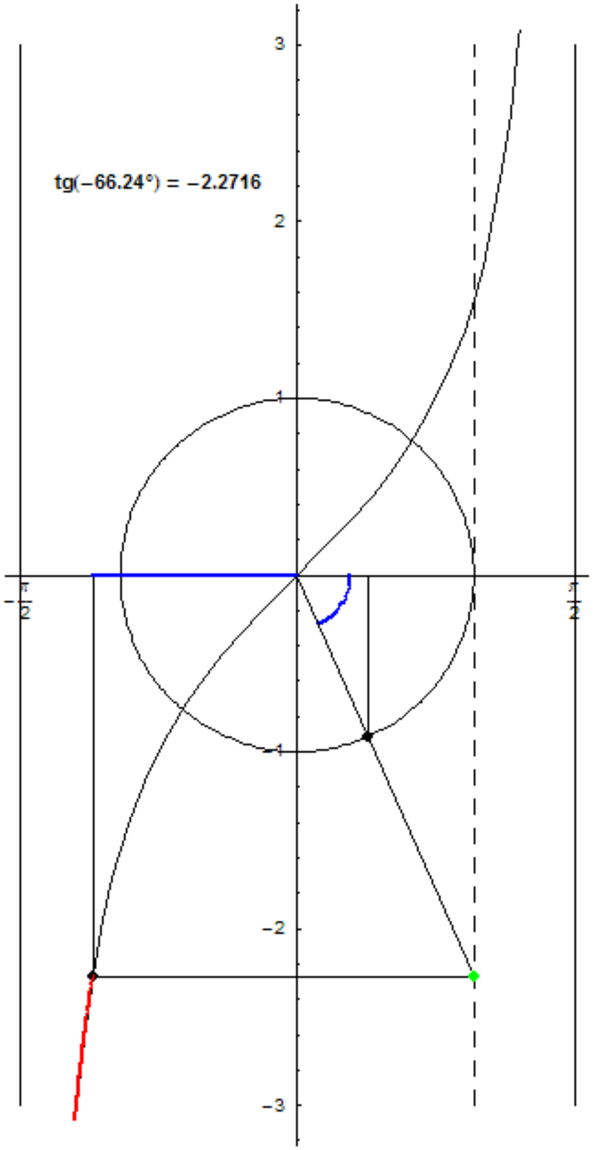


Definizione di tangente

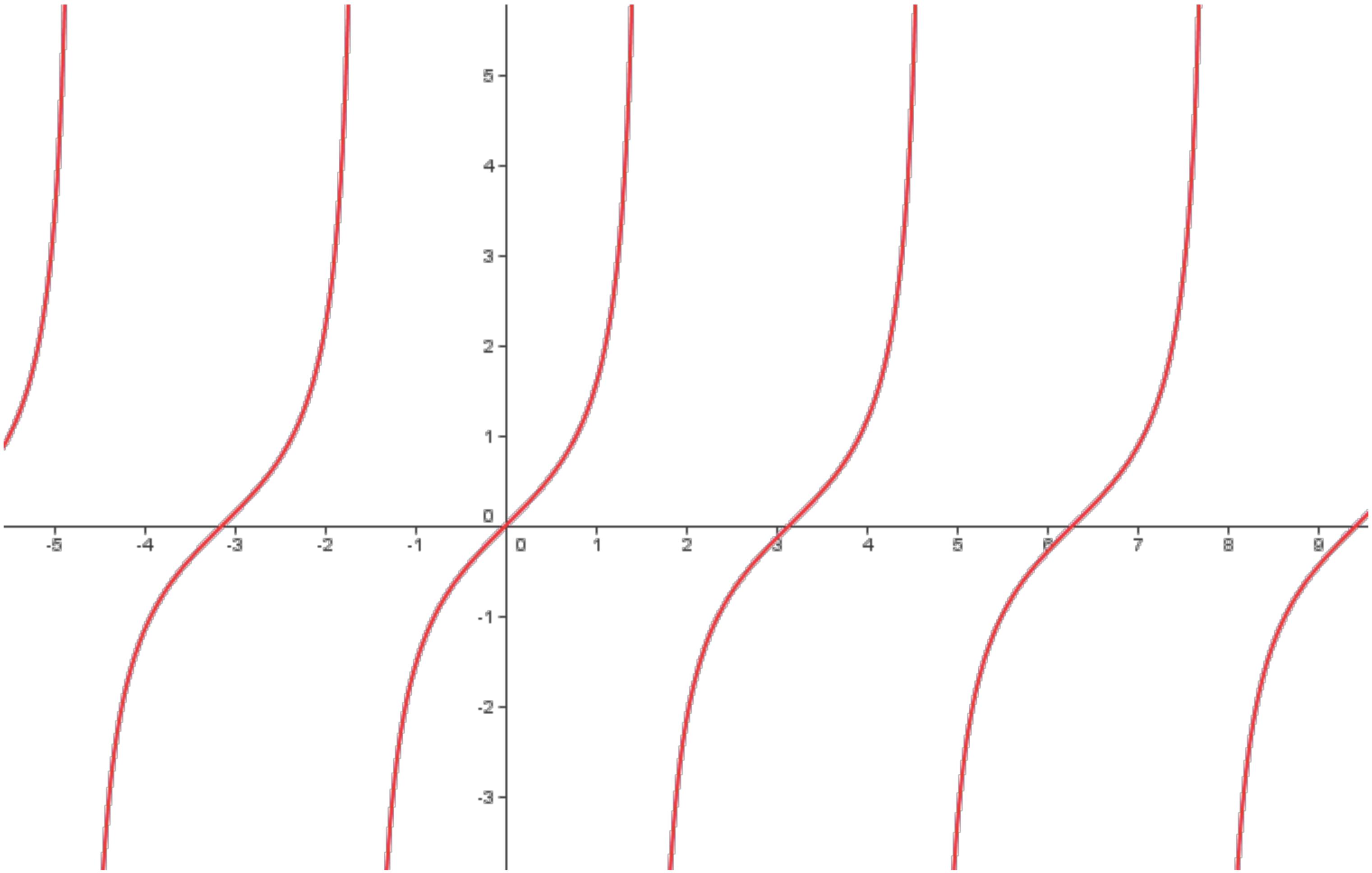
Consideriamo una circonferenza goniometrica, un angolo orientato α, la tangente geometrica alla circonferenza nel punto di coordinate (1,0). Definiamo tangente dell'angolo α la funzione che ad α associa l'ordinata del punto d'intersezione tra il prolungamento del raggio vettore e la tangente considerata

Variazione della tangente

La funzione tangente assume tutti i valori compresi tra -∞ e + ∞



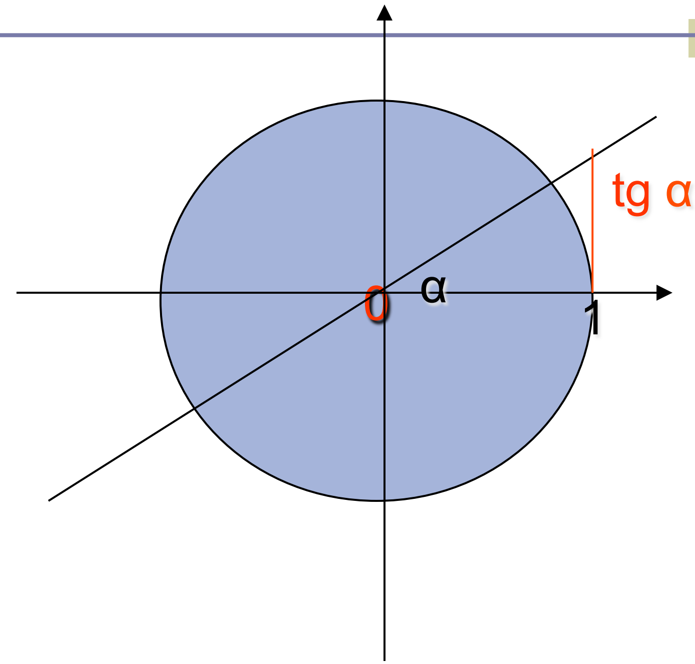
Tangentoide   Y = tg x



Periodo della tangente

La funzione tangente ha periodo π

Significato goniometrico del coefficiente angolare



$m = y/x \quad = \quad tg\ \alpha / 1 = tg\ \alpha$

La seconda relazione fondamentale

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

ANGOLI PARTICOLARI

	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3/2 π	2π
senα	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0	-1	0
cos α	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	0	1
tg α	0	√3/3	1	√3	+ ∞	0	- ∞	0

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

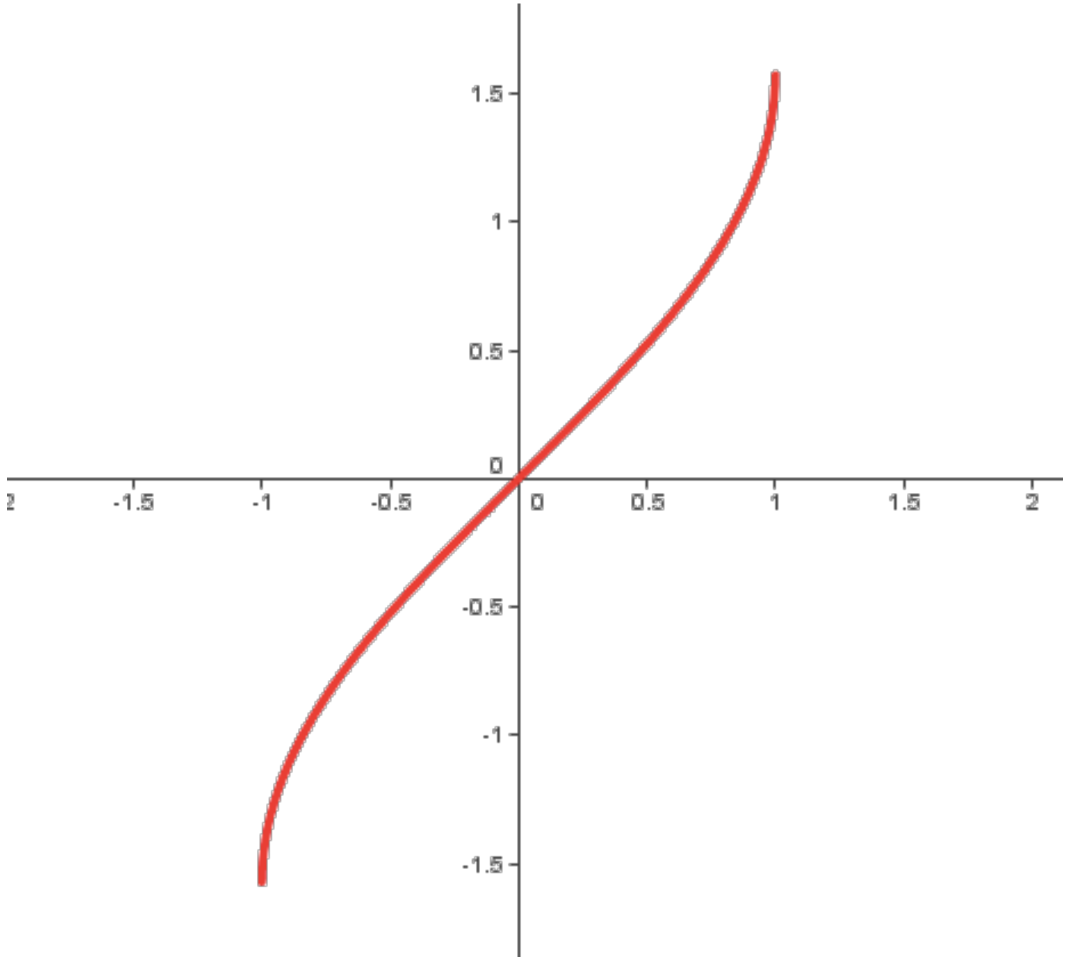
Una funzione è invertibile, ossia ammette la funzione inversa solo se è biiettiva.

y = sen x ***D = [- π/2, π/2]*** ***C = [-1, 1]***

y = arcsen x ***D = [-1, 1]*** ***C = [- π/2, π/2]***

Il grafico della funzione y = arcsen x è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante della funzione y = sen x

y = arcsen x

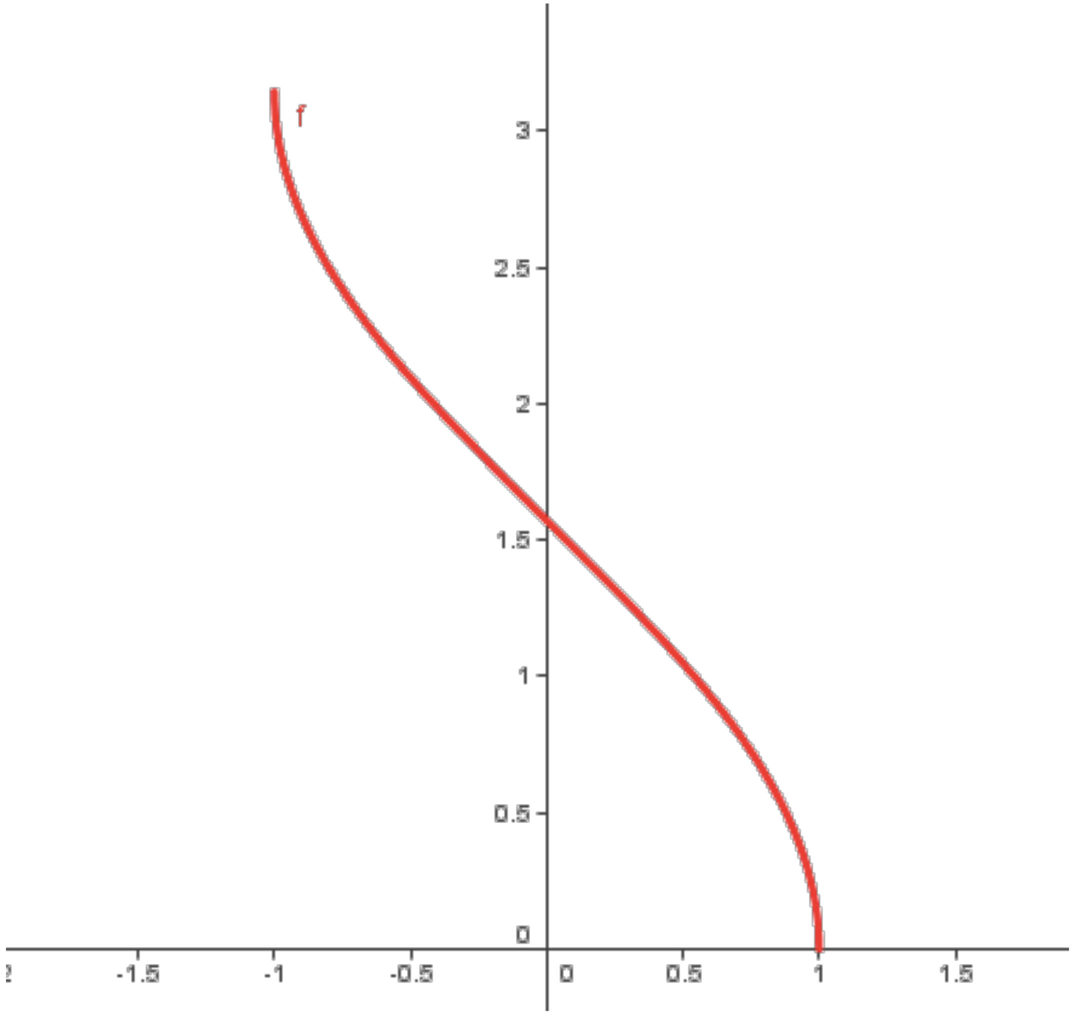


$y = \cos x$ *$D = [\,0,\ \pi\,]$* *$C = [-1,\ 1]$*

$y = \arccos x$ *$D = [-1,\ 1]$* *$C = [\,0,\ \pi\,]$*

Il grafico della funzione $y = \arccos x$ è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante della funzione $y = \cos x$

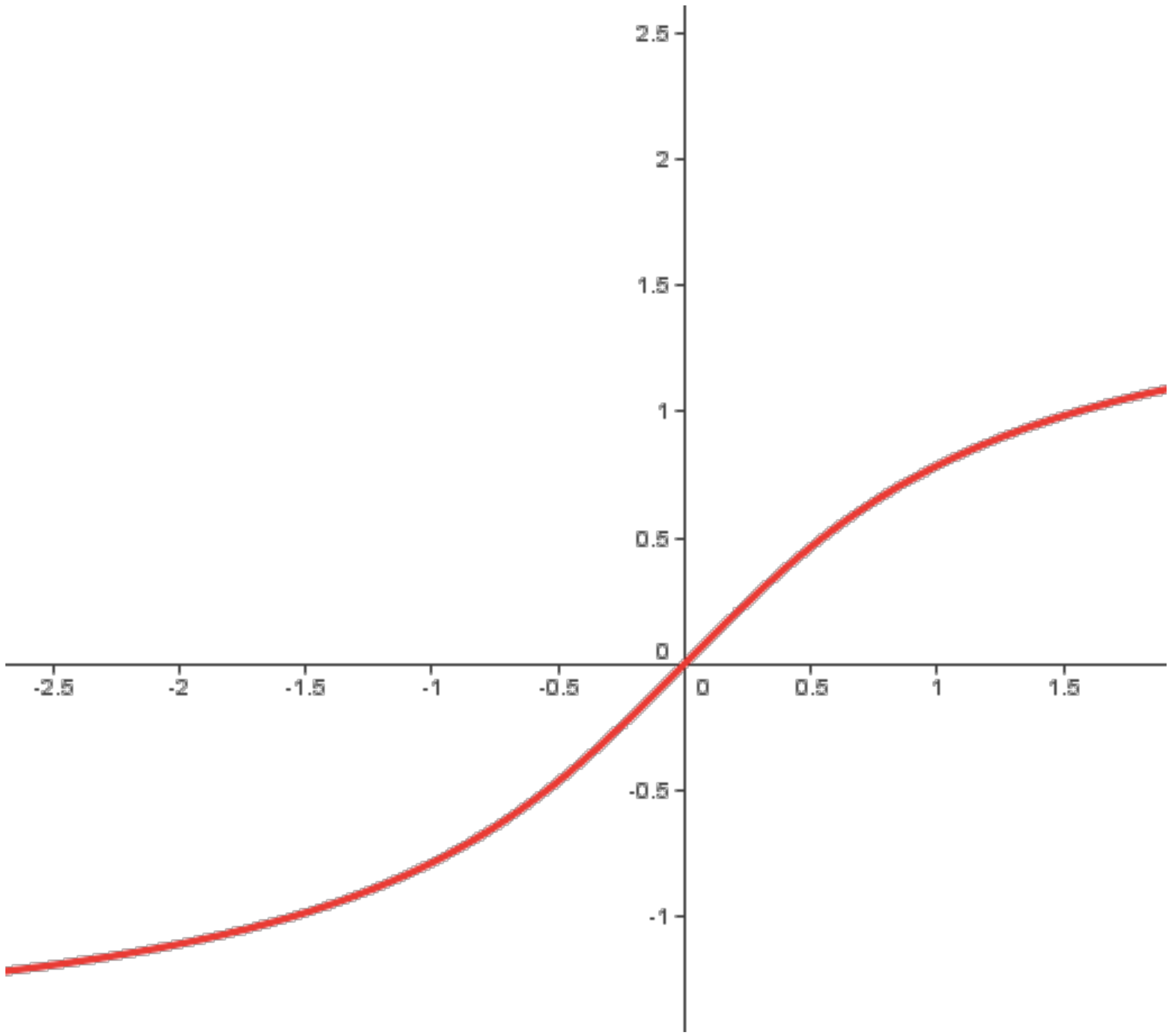
y = arccos x



$y = tg\, x$ $\quad D =]-\pi/2, \pi/2[\quad C = R$

$y = arctg\, x$ $\quad D = R \quad C =]-\pi/2, \pi/2[$

$y = \mathrm{arctg}\ x$



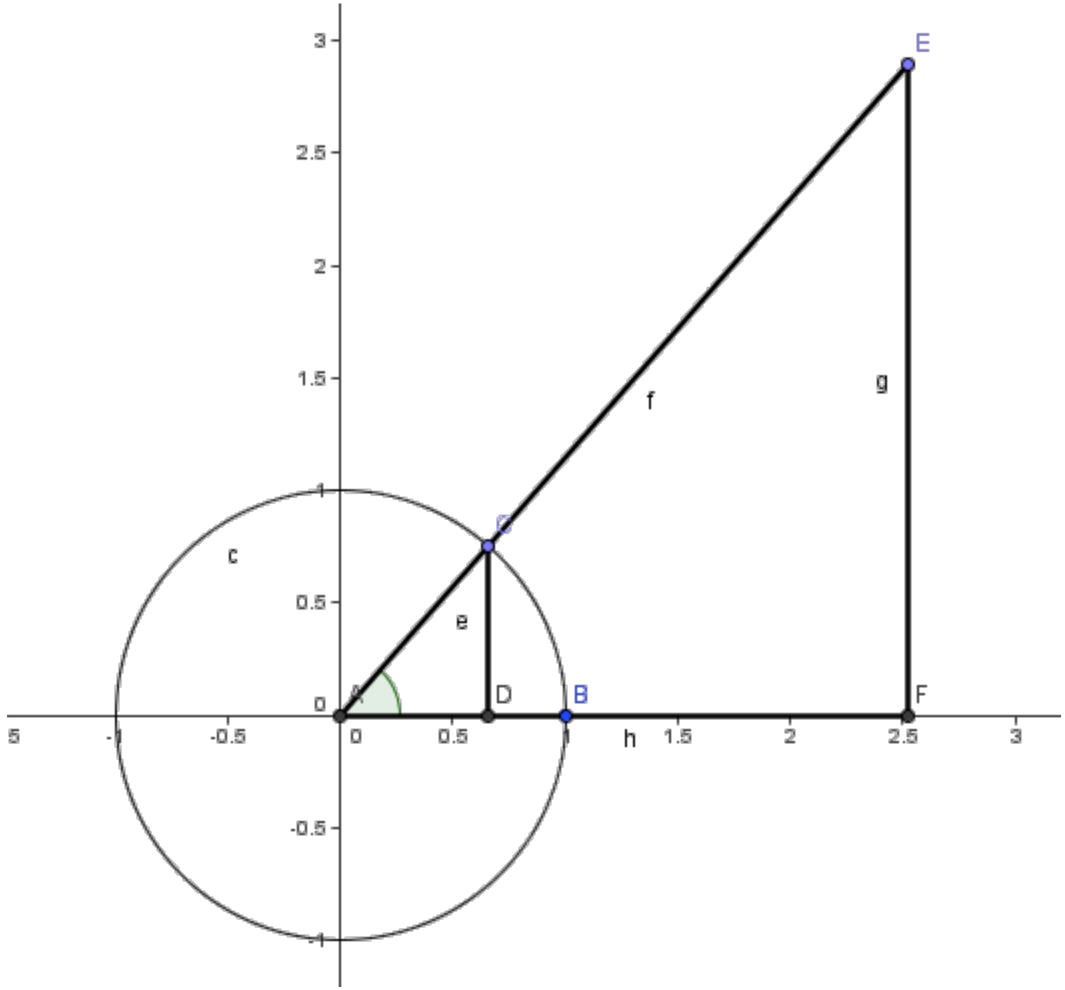
trigonometria

Per risolvere un triangolo rettangolo bisogna determinare le misure dei lati e degli angoli che lo compongono.

Studiamo, quindi le relazioni che intercorrono tra le misure lineari e circolari di un triangolo rettangolo

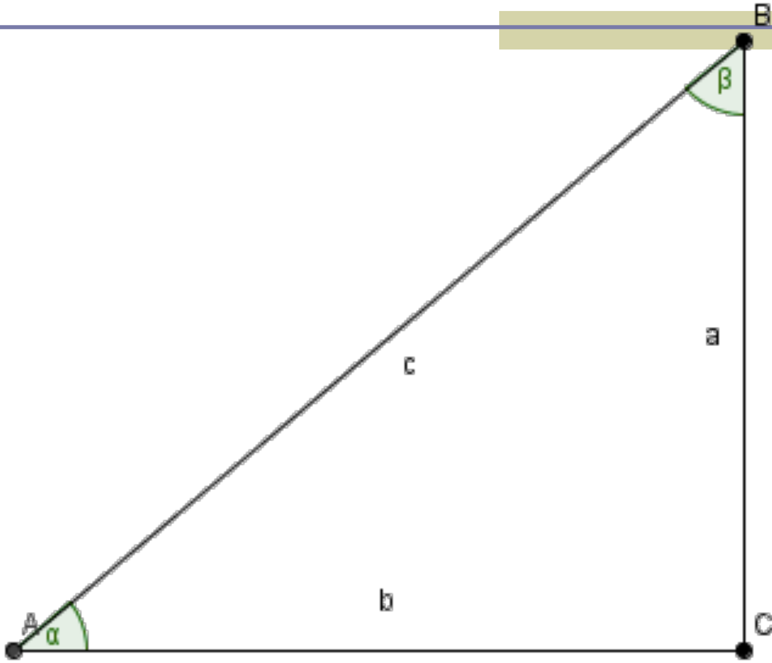
Risoluzione dei triangoli rettangoli

Utilizzando la similitudine dei triangoli riusciamo a risolvere facilmente i triangoli retttangoli



Primo teorema

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto o per il coseno dell'angolo adiacente al cateto

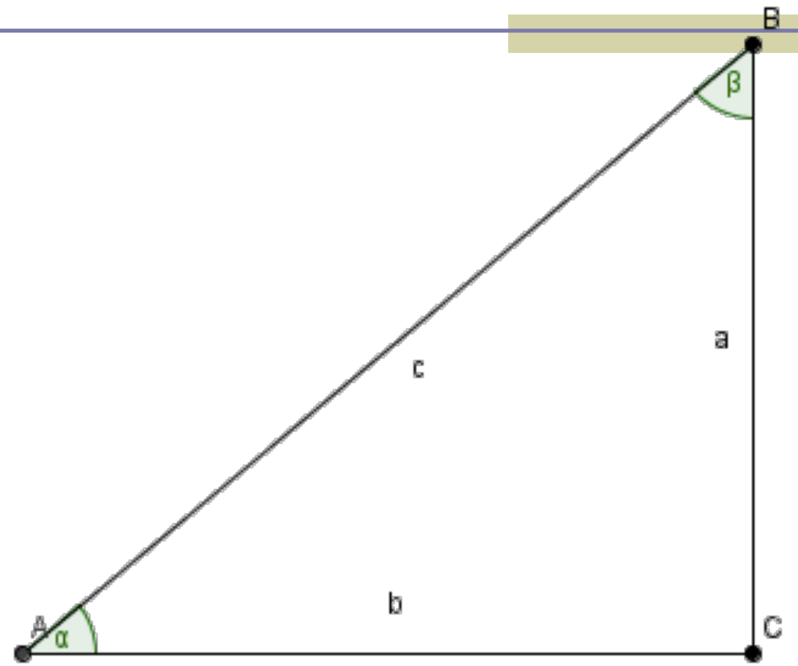


$$a = c \text{ sen } \alpha = c \cos \beta$$

$$b = c \text{ sen } \beta = c \cos \alpha$$

Secondo teorema

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al cateto o per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto



$a = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$

$b = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha$