SCHEDA DI LAVORO 5ª D

I NUMERI COMPLESSI

① **Esercizio pilota**

Risolvi l'equazione $x^2+25=0$ in $\mathbb{C}$ (insieme dei numeri complessi):

$$x^2+25=0$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-25}=\pm i5=\pm 5i$$

$\uparrow$ $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}$

Per definizione $\boxed{i^2=-1}$

...E ora provate voi:

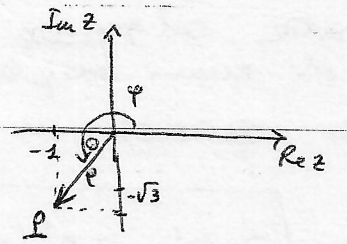
Risolvi le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:

- $x^2+4=0$
- $x^2+x+8=0$
- $5x^2-3x+1=0$

② Scrivi sotto forma trigonometrica i seguenti numeri complessi, segnando le relative immagini nel piano di Gauss.

Esercizio pilota

$z=-1-i\sqrt{3}$



$a=-1$

$b=-\sqrt{3}$

$\rho=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=$
$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi=\text{arctg}\,\dfrac{b}{a}\begin{cases} & \text{se } a>0\\ +\pi & \text{se } a<0\end{cases}$

$\varphi=\text{arctg}\,\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\text{arctg}\,\sqrt{3}=$
$=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

$z=\rho(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)\longrightarrow z=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)$

...E ora provate voi:

- $1+i\sqrt{3}$
- $-1-i$
- $\frac{3}{4}i$
- $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$
- -5

③ Trovare il prodotto dei seguenti numeri complessi e verificare usando le formule trigonometriche.

- $(\sqrt{3}-i)(-1+i)$
- $(1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})$
- $(-\sqrt{3}+i)(1-i)$
- $i(2+\sqrt{2}i)$
- $-i(1+i)$

④ Trovare il quoziente dei seguenti numeri complessi e verificare usando le forme trigonometrice.

Esercizio pilota

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}=\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{1+1}=\frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}}=i$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{1}{1} = \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

$a=1 \quad b=-1$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{-1}{1} = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)}{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7}{4}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7}{4}\pi\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

... E se provate voi

- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$
- $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\dfrac{-1-i}{3-i\sqrt{3}}$

La forma trigonometrica si presta ad seguire le operazioni di moltiplicazione e divisione di numeri complessi.

PRODOTTO DI DUE NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

$$z = \rho(\cos\varphi + i \,\text{sen}\,\varphi)$$

$$z' = \rho'(\cos\varphi' + i \,\text{sen}\,\varphi')$$

$$\boxed{z \cdot z' = \rho\rho'\left(\cos(\varphi+\varphi') + i \,\text{sen}(\varphi+\varphi')\right)}$$

prodotto dei moduli

somma degli argomenti

QUOZIENTE DI DUE NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}\left[\cos(\varphi-\varphi') + i \,\text{sen}(\varphi-\varphi')\right]}$$

Il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti

---

POTENZA DI UN NUMERO COMPLESSO

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \,\text{sen}\, n\varphi)$$

RADICI N-ME DI UN NUMERO COMPLESSO

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$