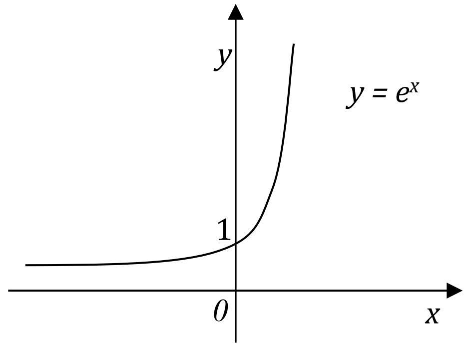
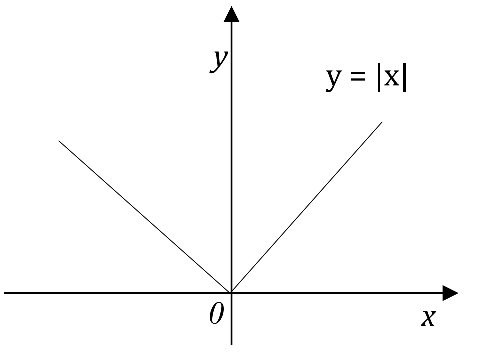
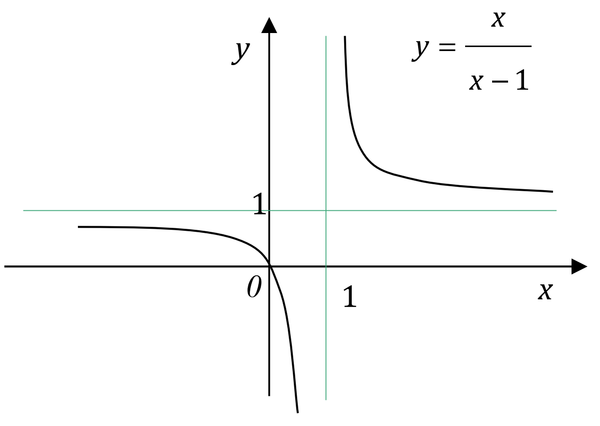
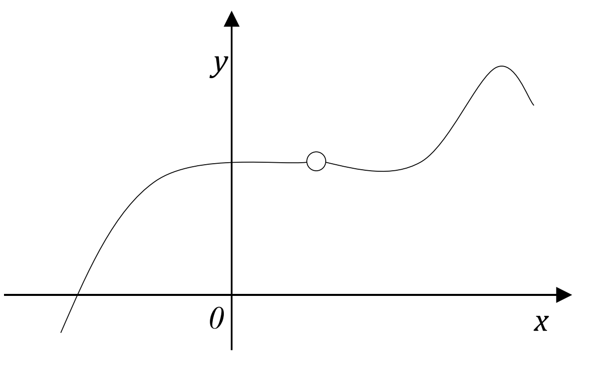
Continuità delle funzioni

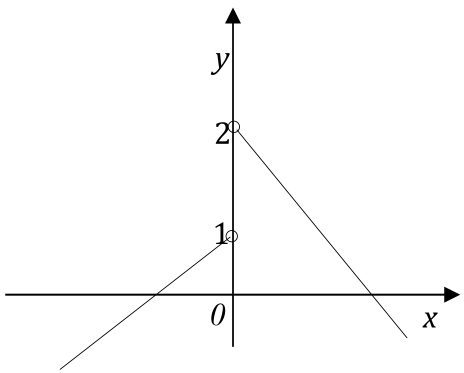
Secondo te quali delle seguenti funzioni sono continue?

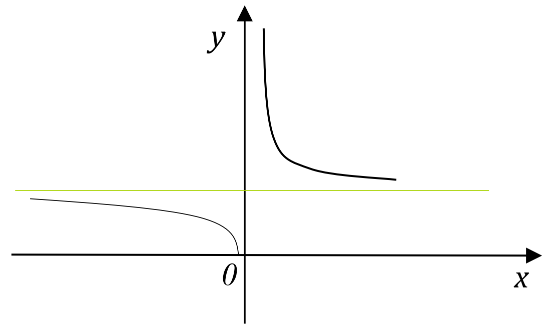


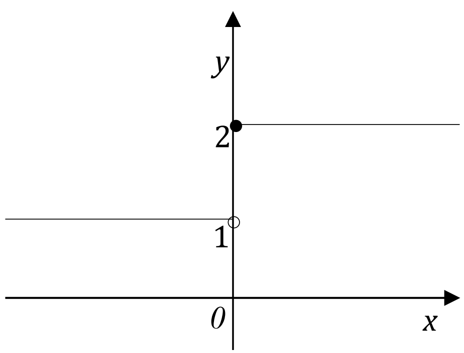


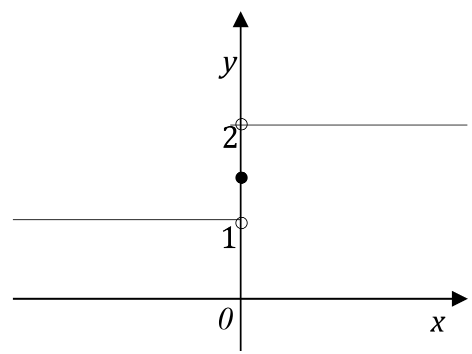





y
2
1
0
x


y
0
x


y
2
1
0
x


y
2
1
0
x

Funzione continua in un punto

Definizione di funzione continua

Sia ***y=f(x)*** una funzione definita in un intervallo I, aperto o chiuso, e sia $\boldsymbol{x_0}$ un punto interno a questo Intervallo, $x_0 \in I$; diciamo che la funzione ***f(x)*** è **continua** in $\boldsymbol{x_0}$ se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Deduzioni

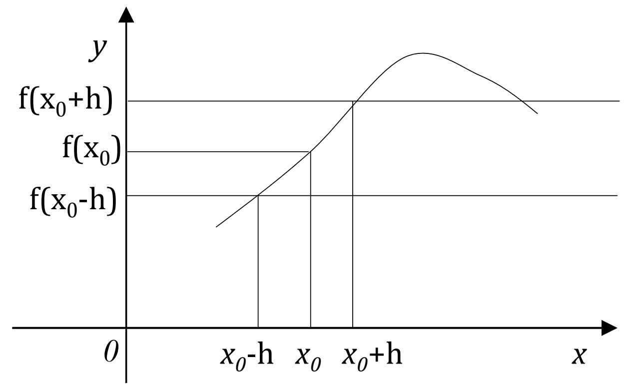
1) Esiste finito $f(x_0)$ il valore della funzione nel punto x_0

2) Esiste ed è finito l il limite della funzione per $x \to x_0$

3) $l = f(x_0)$ il limite l coincide con $f(x_0)$, ossia il valore assunto dalla funzione nel punto

Se conveniamo di porre $x = x_0 + h$, con h variabile, la condizione di continuità si può esprimere nella forma:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$



Ciò si traduce nel fatto che
"tanto più x_0+h si avvicina a x_0, quanto più $f(x_0+h)$ si avvicina a $f(x_0)$"

Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0
il calcolo del limite per x tendente a x_0
si ottiene sostituendo nella funzione $x = x_0$

Esempi di funzioni continue

a) La funzione *f(x) = k* è continua in ogni suo punto; cioè qualunque sia x_0

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

Esempi di funzioni continue

b) La funzione *f(x) = x* è continua in ogni suo punto; cioè qualunque sia x_0

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Esempi di funzioni continue

c) La funzione *f(x)* = x^n con *n* intero e positivo è continua in ogni suo punto; cioè qualunque sia x_0

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

Esempi di funzioni continue

d) Se la funzione *f(x)* è continua in x_0 lo è pure la funzione $k \cdot f(x)$ con *k* costante;

cioè

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot f(x_0)$$

Esempi di funzioni continue

e) Se le due funzioni *f(x)* e *g(x)* sono continue in x_0 lo sono pure:

$$f(x) + g(x) \qquad f(x) - g(x) \qquad f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x_0) \neq 0$$

Esempi di funzioni continue

f) La funzione razionale fratta è continua in ogni *x* che non annulla il denominatore

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$f(x)$ è continua per ogni x tale che $D(x) \neq 0$

Esempi di funzioni continue

f) Le funzioni irrazionali

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

sono continue
in ogni *x*, se *n* è un intero positivo dispari

sono continue
in ogni *x>0*, se *n* è un intero positivo pari

Esempi di funzioni continue

f) La funzione esponenziale

$$f\left(x\right)=a^{x}$$ **(con *a>0*)**

è continua in ogni *x*

Esempi di funzioni continue

f) La funzione logaritmica

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1\ )$$

è continua in ogni ***x>0***

Esempi di funzioni continue

f) Le funzioni trascendenti

$$f(x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \cos x$$

sono continue in ogni x

Funzione continua in un intervallo

Definizione

Una funzione è continua in un intervallo chiuso [a,b] se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Proprietà delle funzioni continue

Per le funzioni continue il segno di limite e di funzione si possono permutare, ossia la condizione di continuità di *f(x)* si può anche scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Funzione di funzione

Sia $z=g(x)$ una funzione definita in un intervallo (a,b).

Sia inoltre $y=f(z)$ una funzione della variabile z, definita per ogni valore della variabile z che si ricava dalla funzione $z=g(x)$ al variare di x nell'intervallo suddetto.

Funzione di funzione

Dicesi funzione di funzione o funzione composta la funzione

$$y=f[g(x)]$$

Funzioni composte f(g(x))

In generale la proprietà delle funzioni continue, per cui il limite e la funzione si possono scambiare, vale per le funzioni composte.

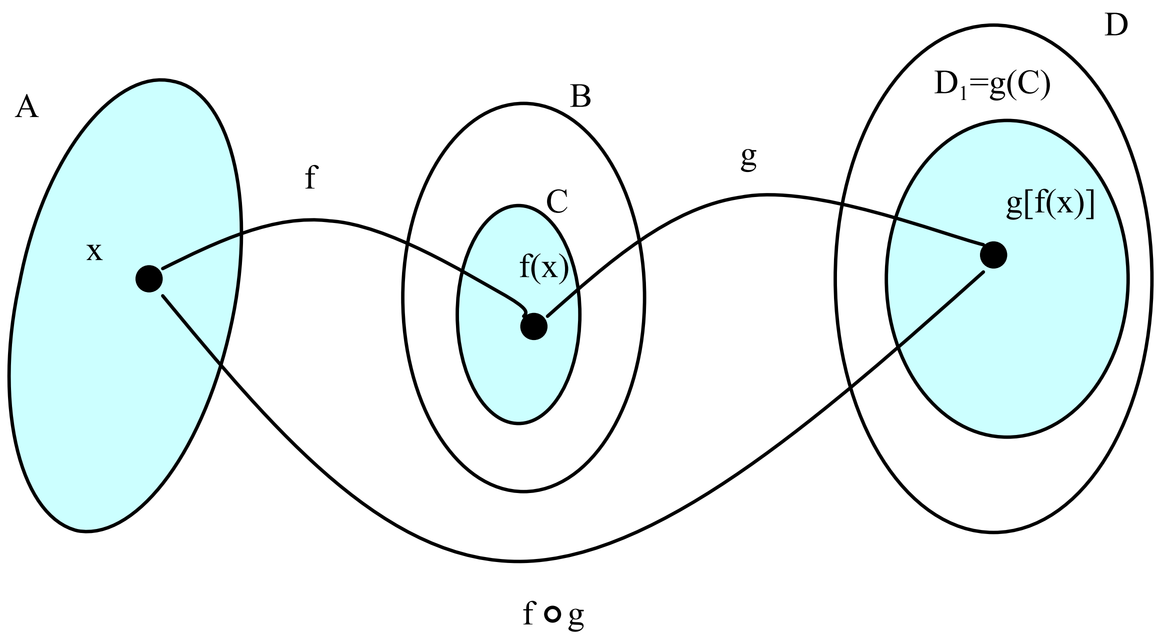
Funzioni composte f(g(x))

Supponiamo di avere due funzioni reali di variabile reale:

f: A→ B, $t = f(x)$ e g: C→D, $y = g(t)$

e se f(A) e C hanno elementi in comune, allora le funzioni f e g definiscono la funzione composta:

$$f \circ g : A \rightarrow D \quad \text{con} \quad y = g[f(x)]$$



Possiamo ricordare quindi che la funzione $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ è la composizione delle funzioni

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g(t) = \sqrt{t}\,.$$

Teorema continuità delle funzioni composte

Se la funzione g è continua in x_0 e la funzione f è continua in $g(x_0)$, allora anche la funzione composta $(f \circ g)(x_0)=f(g(x_0))$ è continua in x_0.

Esempio

$$z = g(x) = \log x \qquad D = x > 0$$

$$y = f(z) = x^2 + 4x + 6 \qquad D = R$$

$$y = f(z) = f(g(x)) = f(\log x) = \log^2 x + 4\log x + 6$$

$y = f(g(x))$ è continua in $x > 0$

Punti di discontinuità di una funzione

Punti di discontinuità e loro classificazione

Diremo che una funzione è discontinua in un punto x_0 , $\boldsymbol{x_0}$ **è un punto di discontinuità**, se:

1) Il punto x_0 appartiene al dominio della funzione, ma la funzione non è ivi continua
2) Il punto x_0 non appartiene al dominio della funzione, ma è di accumulazione per esso.

Punti di discontinuità

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$,

il punto x=0 appartiene al dominio della funzione, ma la funzione non è continua in $x=0$ poiché $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste, mentre $f(0)=1$.

Il punto $x=0$ è un punto di discontinuità della funzione.

Punti di discontinuità

La funzione $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$ è definita in $R - \{3\}$;

Il punto *x=3* non appartiene al dominio della funzione, ma è di accumulazione per esso.

Diremo allora che *x=3* è un punto di discontinuità della funzione.

Discontinuità di prima specie

Definizione

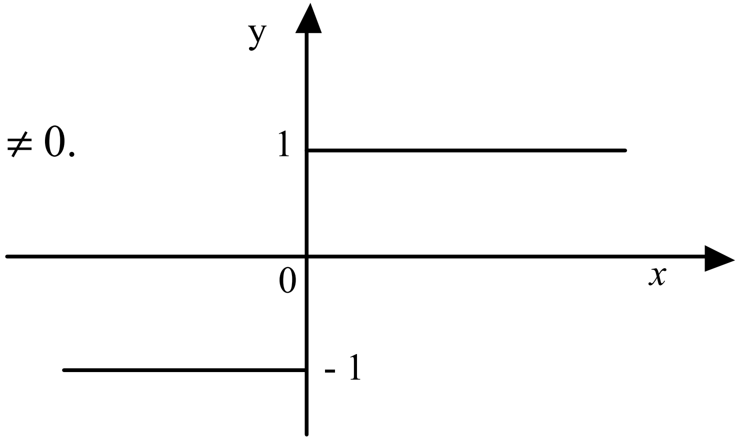
La funzione è discontinua di prima specie in x_0 quando in tale punto esistono finiti ma diversi tra loro il limite sinistro e il limite destro.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Esempio

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$ (funzione segno di x)

E' definita per ogni x ≠ 0.



Si ha

f(x) = -1   per x < 0;
f(x) = 1   per x > 0;

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

La differenza

$$\left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Si chiama **salto** della funzione in x_0

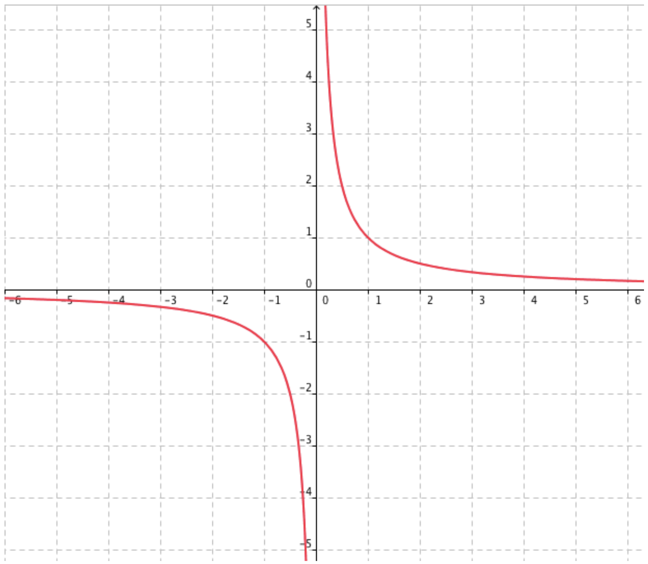
Discontinuità di seconda specie

La funzione è discontinua di seconda specie in x_0 quando in tale punto o non esiste o non è finito almeno uno dei limiti sinistro e destro.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \nexists$$

Discontinuità di seconda specie

$$f(x)=\frac{1}{x}$$



La funzione è definita e continua in $R-\{0\}$.
Osserviamo che i limiti sinistro e destro in 0 sono infiniti:

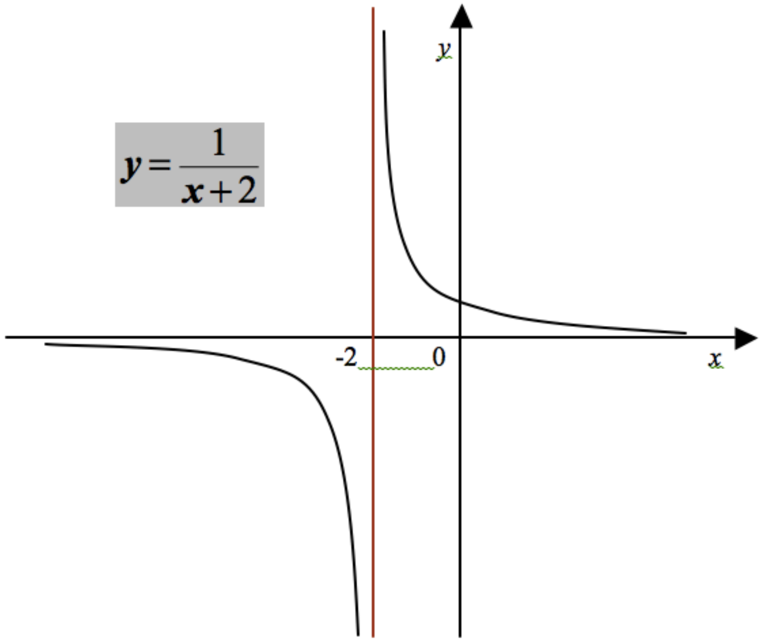
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Quindi <u>x=0 è un punto di discontinuità di seconda specie</u> per la funzione. La retta x=0 (cioè l'asse y) risulta un asintoto verticale per la funzione.

Discontinuità di seconda specie

Esempio

Dal diagramma dell'iperbole omografica $y = \frac{1}{x+2}$, il cui grafico si può tracciare traslando di due unità a sinistra l'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$, si nota che nel punto di



ascissa x = -2, punto di accumulazione del dominio, la funzione non è definita e per x che tende a -2, da destra e da sinistra, la funzione tende a più e meno infinito rispettivamente: ossia il limite destro e sinistro esistono, ma non sono finiti: si parla allora di **discontinuità di seconda specie** per la funzione in x= -2 (fig. 1).

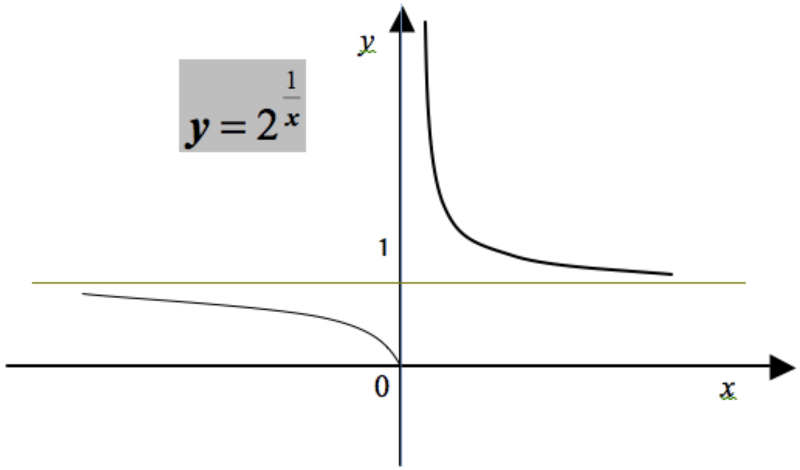
Negli intervalli (-∞,-2), (-2, +∞) la funzione risulta invece continua.

Discontinuità di seconda specie

Esempio

Sia data la funzione di equazione $y = 2^{\frac{1}{x}}$, definita per x $\neq$ 0. Tale funzione nel punto x = 0 è discontinua in quanto:

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 1$$

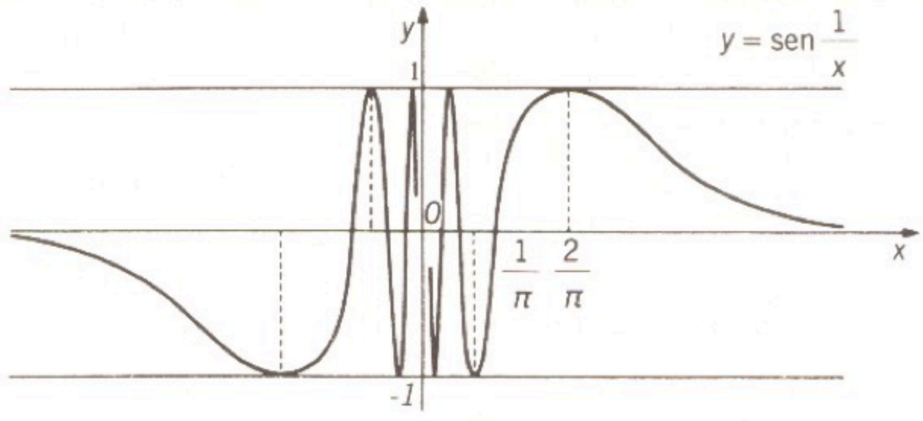


Quindi, poiché uno dei due limiti è infinito, si ha una discontinuità di seconda specie in x=0.

Discontinuità di seconda specie

Esempio

Consideriamo la funzione di equazione $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$, definita per x ≠ 0. Per x = 0 la funzione risulta discontinua di seconda specie; infatti il $\lim_{x\to 0} \text{sen}\,\frac{1}{x}$ non esiste, in quanto, se x tende a zero, la quantità $\frac{1}{x}$ tende all'infinito ed il valore del seno continua a oscillare tra –1 e 1 senza ammettere limite.



Discontinuità eliminabile o di terza specie

La funzione è discontinua di terza specie o ha una *discontinuità eliminabile* in x_0 quando in tale punto esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$

a) ma $f(x)$ non è definita in x_0

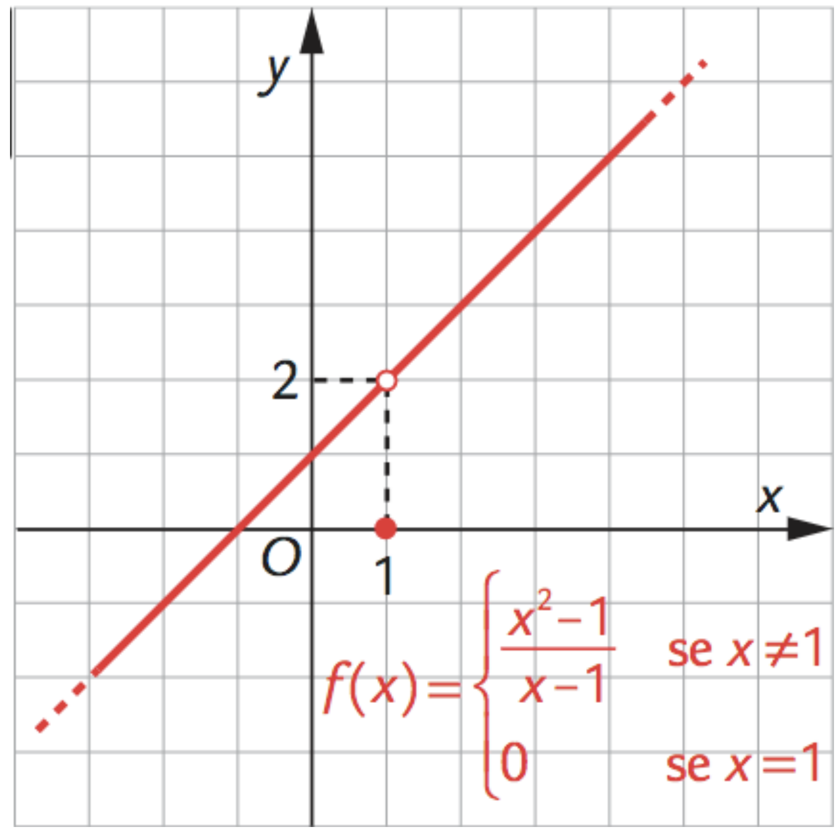
oppure

b) $f(x_0)$ *esiste* finito, ma il suo valore è diverso da detto limite.

Discontinuità eliminabile o di terza specie

Esempio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$$



Discontinuità eliminabile o di terza specie

La funzione data è definita in tutto R ed è continua per x≠0. Per vedere il comportamento della funzione in un intorno di 1 calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Pertanto il limite per $x \to 1$ esiste finito, *ma è diverso* da $f(1)=0$.

Quindi $x=1$ è un punto di discontinuità eliminabile, secondo il caso b) della definizione

Discontinuità eliminabile o di terza specie

La discontinuità di terza specie è **eliminabile** perché si può rimuovere la discontinuità sostituendo ad $f(x_0)$ il valore del limite, ottenendo così una nuova funzione continua in x_0.

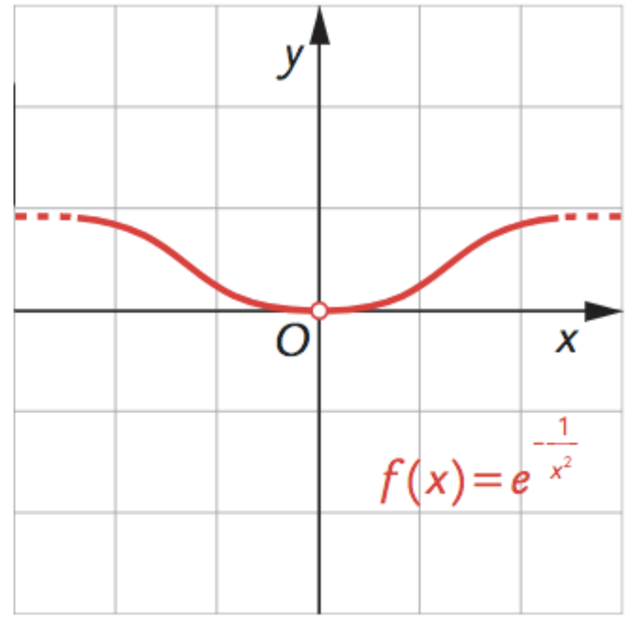
$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & se\ x\neq 1 \\ 2 & se\quad x=1 \end{cases}$$

$g(x)$ si chiama **prolungamento continuo** di f, in quanto f e g coincidono eccetto che per x=1, in cui g risulta continua poiché il $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$

Discontinuità eliminabile o di terza specie

Esempio

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$



La funzione è definita in R- $\{0\}$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}}_{\to e^{-\infty}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Il limite di *f* per x→0 esiste ed è finito (uguale a 0), ma la funzione *non è definita* in *x=0*; in *x=0 f* quindi presenta un punto di discontiuità eliminabile, caso a) della definizione.

Discontinuità eliminabile o di terza specie

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

g(x) prolungamento continuo di *f*

Asintoti

La retta $x=x_0$ si dice **asintoto verticale** della funzione $y=f(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Asintoti

La retta $\boldsymbol{y = l}$ si dice **asintoto orizzontale** della funzione $y=f(x)$ se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Asintoti

La retta $y=mx+q$ si dice **asintoto obliquo** della funzione $y=f(x)$ se:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(mx+q\right)-f\left(x\right)\right]=0$$

con

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$