$y = \frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x$ (funzione razionale intera)

Dominio: D = R

Simmetrie: $f(-x) = f(x)$ pari (simmetrica rispetto all'asse x) $\qquad f(-x) = -f(x)$ dispari (simmetrica rispetto all'origine)

$f(-x) = \frac{4}{3}(-x)^3 - \frac{9}{5}(-x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{5}x = -\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{5}x\right) = -f(x)$ è DISPARI

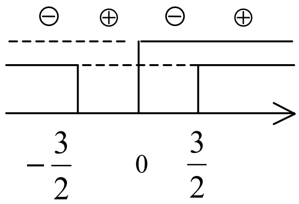
Intersezione con gli assi:

$\begin{cases} x = 0 & \text{asse y} \\ y = \frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y = 0 & \text{asse } x \\ \frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \quad x = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$

Segno: $f(x) > 0$

$\frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x > 0 \rightarrow 4x^3 - 9 > 0 \rightarrow x(4x^2 - 9) > 0$ da cui

$x > 0 \quad \vee \quad 4x^2 - 9 > 0 \quad 4x^2 - 9 = 0 \quad x = \pm\frac{3}{2} \qquad x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}$



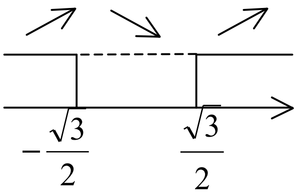

Limiti agli estremi del campo di esistenza per la ricerca degli asintoti:

$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x = \frac{\infty}{\infty}$ F.I. $\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5}x^3\left(4 - \frac{9}{x^2}\right) = \infty$ non ci sono asintoti orizzontali, però poiché $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, condizione necessaria, ma non sufficiente per l'esistenza dell'asintoto obliquo

Cerchiamo se esiste *m*: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{9}{5}x\right)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{5}x^2 - \frac{9}{5} = \infty$ non ci sono asintoti obliqui.

Segno della derivata prima (per la ricerca degli intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale):

$y' = \frac{4}{5}\cdot 3x^2 - \frac{9}{5} = \frac{3}{5}(4x^2 - 3) \geq 0 \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ punti stazionari

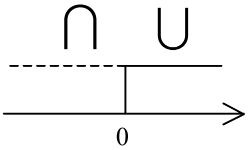



M$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{5}\sqrt{3})$ max rel.

N $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{6}{5}\sqrt{3})$ min. rel.

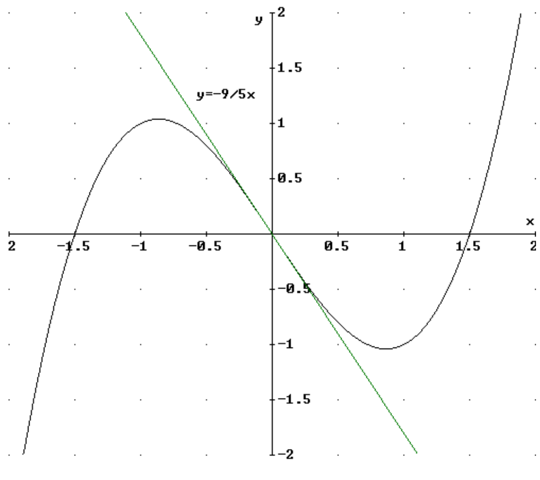
Derivata seconda per la ricerca degli intervalli di concavità e i flessi:

$y'' = \frac{3}{5}\cdot 8x = \frac{24}{5}x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$




F(0, 0) punto di flesso a tangente obliqua, infatti

$f'(0) = -\frac{9}{5} \neq 0$ (*m*) coefficiente angolare della tangente di flesso (tangente inflessionale)




Equazione della retta tangente nel punto di flesso (tracciata nel grafico):

$y - 0 = -\frac{9}{5}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{9}{5}x$ (retta per l'origine)

$$y=\frac{4x-1}{2x^2}$$ (funzione razionale fratta)

Dominio: $2x^2\neq 0 \rightarrow \ x\neq 0 \qquad D=R-\{0\}$

Simmetrie $\quad f(-x)=\dfrac{-4x-1}{2(-x)^2}=\dfrac{-4x-1}{2x^2}\neq f(x) \quad e\ f(-x)\neq -f(x)$ non ci sono simmetrie

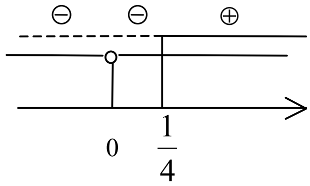
Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{4x-1}{2x^2}\end{cases} \text{asse y} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{-1}{0}\end{cases} imp.\ in\ \Re \qquad \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{4x-1}{2x^2}=0 \quad x\neq 0\end{cases} \text{asse } x \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{4}\end{cases} \quad A\left(\frac{1}{4};0\right)$$

Segno: $f(x)>0$

$\dfrac{4x-1}{2x^2}>0 \qquad$ N: $4x-1>0 \ \rightarrow \ x>\dfrac{1}{4}$

D: $2x^2>0 \ \rightarrow \ \forall x\in\Re-\{0\}$




Limiti agli estremi del campo di esistenza per la ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{4x-1}{2x^2}=-\frac{1}{0^+}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{4x-1}{2x^2}=-\frac{1}{0^+}=-\infty \qquad x=0$$ asintoto verticale e punto di discontinuità di seconda specie

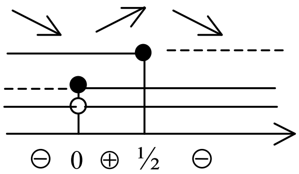
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{F.I.} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2x^{\cancel{2}}}=\frac{4}{\infty}=0$$ $y=0$ asintoto orizzontale

Segno della derivata prima per la ricerca degli intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale:

$$y'=\frac{4\cdot 2x^2-(4x-1)4x}{4x^4}=\frac{4x(2x-4x+1)}{4x^4}=\frac{x(1-2x)}{x^4}\geq 0$$

N: $x(1-2x)\geq 0 \ \rightarrow \ x\geq 0 \ \vee \ x\leq\dfrac{1}{2}$

D: $x^4>0 \quad \forall x\in\Re-\{0\}$




$x$=0 non classificabile (non è in D)

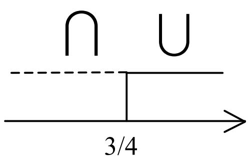
N $\left(\frac{1}{2},2\right)$ min. rel.

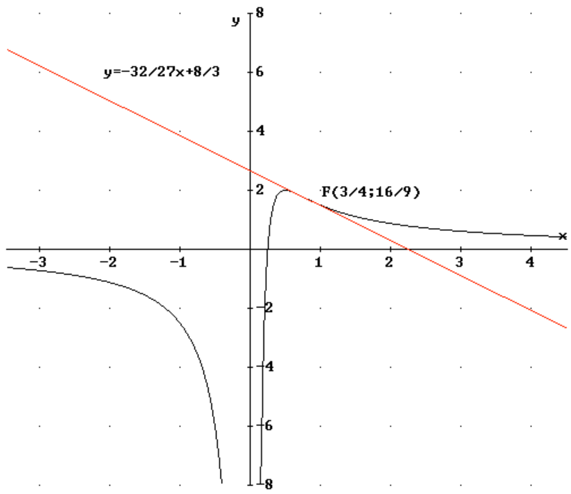
Derivata seconda per la ricerca degli intervalli di concavità e i flessi:

Se semplifico la derivata prima ottengo $y'=\dfrac{1-2x}{x^3}$, da cui:

$$y''=\frac{-2x^3-(1-2x)3x^2}{(x^3)^2}=\frac{-2x^3-3x^2+6x^3}{x^6}=$$

$$=\frac{4x^3-3x^2}{x^6}=\frac{4x-3}{x^4}\geq 0 \ \rightarrow x\geq\frac{3}{4}$$




F(3/4, 16/9) punto di flesso a tangente obliqua, infatti

$f'(3/4)=-\dfrac{32}{27}\neq 0 \qquad$ ($m$) coefficiente angolare della tangente nel punto di flesso (tangente inflessionale)

Equazione della retta tangente nel punto di flesso (tracciata sul grafico):

$$y-\frac{16}{9}=-\frac{32}{27}\left(x-\frac{3}{4}\right) \rightarrow y=-\frac{32}{27}x+\frac{8}{3}$$

$$y=\frac{x^2+2x+4}{2x}$$ (funzione razionale fratta)

Dominio: $2x \neq 0 \rightarrow \; x \neq 0$ $\quad$ D = R − {0}

Simmetrie $\quad f(-x)=\frac{(-x)^2+2(-x)+4}{2(-x)}=\frac{x^2-2x+4}{-2x}=-\frac{x^2-2x+4}{2x} \neq f(x) \quad e\; f(-x) \neq -f(x)$ non ci sono simmetrie

Intersezione con gli assi:

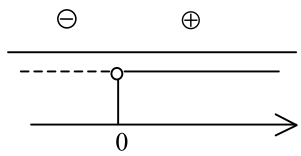
$$\begin{cases} x=0 & \text{asse y} \\ y=\frac{x^2-2x+4}{2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{4}{0} & imp.\, in\, \Re \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 & \text{asse } x \\ \frac{x^2+2x+4-1}{2x}=0 & x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \Delta<0\; imp.\, in\, \Re \end{cases}$$

Non ci sono intersezioni con gli assi.

Segno: $f(x)>0 \quad \frac{x^2+2x+4}{2x}>0$ $\quad$ N: $x^2+2x+4>0 \rightarrow \; x^2+2x+4=0 \rightarrow$

$\Delta=1-4=-3<0 \rightarrow \forall x \in \Re$

D: $2x>0 \rightarrow \; x>0$




Limiti agli estremi del campo di esistenza per la ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\frac{4}{0}=\infty$$ $x$=0 $\quad$ asintoto verticale e punto di discontinuità di seconda specie

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{2\cancel{x}}=\frac{\infty}{2}=\infty$$ non c'è l'asintoto orizzontale.

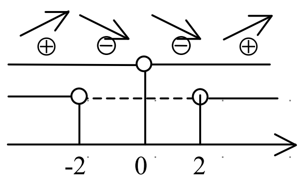
Il fatto che il limite per $x$ che tenda all'infinito tende all'infinito è condizione necessaria, ma non sufficiente per l'esistenza dell'asintoto obliquo. ($\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=q$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{2\cancel{x^2}}=\frac{1}{2}=m$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{2x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+4-\cancel{x^2}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{2x}}=1=q$$

$y=\frac{1}{2}x+1$ $\quad$ asintoto obliquo

Segno della derivata prima per la ricerca degli intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale:



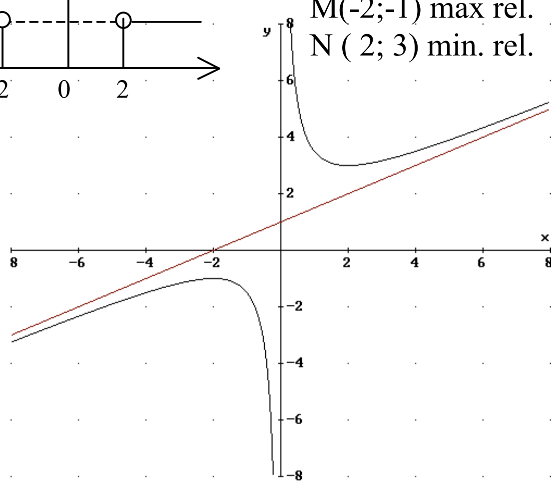

$$y'=\frac{(2x+2)\cdot 2x-\left(x^2+2x+4\right)\cdot 2}{4x^2}=\frac{2x^2-8}{4x^4}\geq 0$$

N: $2x^2-8 \geq 0 \quad x^2-4=0 \quad x=\pm 2$

D: $4x^4>0$ sempre per $x \neq 0$

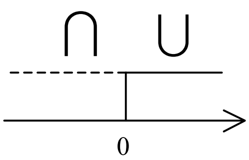
M(-2;-1) max rel.

N ( 2; 3) min. rel.




Derivata seconda per la ricerca degli intervalli di concavità e i flessi:

$y''=\frac{4}{x^3}\geq 0 \rightarrow x>0$ $\quad$ $x$=0 non classificabile (non è in D)



$y = e^{\frac{x-3}{x+2}}$ funzione esponenziale (trascendente)

Dominio: $x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$ $\mathbf{D} = \mathrm{R} - \{-2\}$

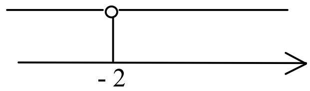
Simmetrie $f(-x) = 2^{\frac{-x-3}{-x+2}} = 2^{-\frac{x+3}{-x+2}} = 2^{\frac{x+3}{x-2}} \neq f(x)$ $e\ f(-x) \neq -f(x)$ non ci sono simmetrie

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 & \text{asse y} \\ y = e^{\frac{x-3}{x+2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 & \text{asse } x \\ e^{\frac{x-3}{x+2}} = 0 & \textit{impossibile} \end{cases}$$

non ci sono intersezioni con l'asse $x$

Segno: $f(x) > 0$ $e^{\frac{x-3}{x+2}} > 0$ $\forall x \in D$




Limiti agli estremi del campo di esistenza per la ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to -2^+} e^{\frac{x-3}{x+2}} = e^{\frac{-5}{0^+}} = e^{-\infty} = 0 \qquad \lim_{x \to -2^-} e^{\frac{x-3}{x+2}} = e^{\frac{-5}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty \quad \text{quindi}$$

$x = -2$ asintoto verticale sinistro e punto di discontinuità di seconda specie

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x-3}{x+2}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} \ \text{F.I.} \qquad \lim_{x \to \infty} e^{\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}} = e^1 = e \quad \text{quindi}$$

$y = e$ asintoto orizzontale

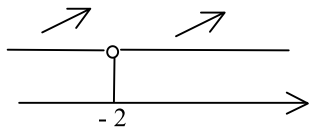
Possibile intersezione con l'asintoto orizzontale y=$e$:

$$\begin{cases} y = e \\ y = e^{\frac{x-3}{x+2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e \\ e^{\frac{x-3}{x+2}} = e \rightarrow \frac{x-3}{x+2} = 1 \rightarrow \frac{\cancel{x}-3-\cancel{x}-2}{x+2} = 0 \rightarrow \frac{-5}{x+2} = 0 \end{cases}$$

impossibile in R. Non ci cono intersez.

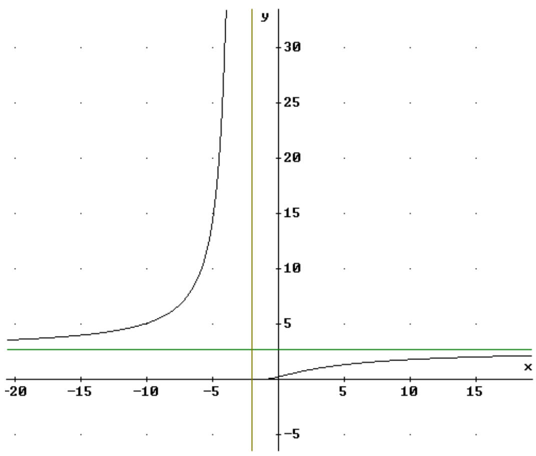
Segno della derivata prima per la ricerca degli intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale:

$$y' = e^{\frac{x-3}{x+2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5 \cdot e^{\frac{x-3}{x+2}}}{(x+2)^2} \geq 0 \quad \forall x \in D$$




$x$=-2 non classificabile (non è in D)

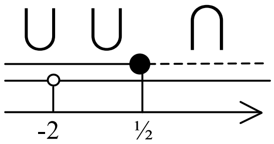
*f(x)* è sempre crescente nel dominio, non ci sono massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale.




Derivata seconda per la ricerca degli intervalli di concavità e i flessi:

$$y'' = \frac{5 \cdot e^{\frac{x-3}{x+2}} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot (x+2)^2 - 5 \cdot e^{\frac{x-3}{x+2}} \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{5 \cdot e^{\frac{x-3}{x+2}} \cdot (1-2x)}{(x+2)^4} \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$




F(1/2, 1/$e$) punto di flesso a tangente obliqua, infatti

$f'(1/2) = \frac{4}{5}e^{-1} \neq 0$ ($m$) coefficiente angolare della tangente nel punto di flesso (tangente inflessionale)

Equazione della retta tangente nel punto di flesso:

$$y - \frac{4}{5}e^{-1} = \frac{4}{5}e^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{4}{5}e^{-1}x + \frac{2}{5}e^{-1}$$