I LIMITI E LE FORME INDETERMINATE

CASO $\boxed{+\infty-\infty}$

Si fanno op. algebriche come le razionalizzazione

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

Moltiplico e divido per $x+\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{+\infty}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-3x^2+1\right)=+\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

Raccogliamo x^4

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=$$

Poichè $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=\frac{-3}{+\infty}=0$ e

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=\frac{1}{+\infty}=0$ risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\underset{\downarrow\,+\infty}{x^4}\left(1-\underset{\searrow 0}{\frac{3}{x^2}}+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^4}}\right)=+\infty\cdot1=\boxed{+\infty}$$

In generale posso dire che x^n è il termine principale

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\underset{\downarrow\,\infty}{x^n}\left(a_0+\underset{\downarrow 0}{\frac{a_1}{x}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{a_2}{x^2}}+\ldots+\underset{\downarrow 0}{\frac{a_n}{x^n}}\right)=$$

$$=\boxed{\infty}$$

il segno dipende da a_0 e se n pari o dispari

CASO $\boxed{0\cdot\infty}$

Si fanno operazioni algebriche o si trasforma l'espressione utilizzando le formule di trigonometria

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\underset{\downarrow\,1}{(1-\operatorname{sen}x)}\cdot\underset{\downarrow\,+\infty}{\operatorname{tg}x}=0\cdot\infty \quad \text{F.I.}$$

Facciamo operazioni nelle funzioni trasformiamo $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ e moltiplichiamo e dividiamo per $(1+\operatorname{sen}x)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\operatorname{sen}x)\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-\operatorname{sen}^2x}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^{\cancel{2}}x\cdot\operatorname{sen}x}{(1+\operatorname{sen}x)\cdot\cancel{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\overset{1\,\uparrow}{\operatorname{sen}x}\cdot\overset{0\,\uparrow}{\cos x}}{\underset{\downarrow\,1}{1+\operatorname{sen}x}}=\frac{1\cdot0}{2}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\underset{\downarrow\,0}{\operatorname{sen}2x}\cdot\underset{\downarrow\,+\infty}{\operatorname{cotg}x}\right]=0\cdot\infty \quad \text{F.I.}$$

$$\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{cotg}x\underset{\uparrow}{=}2\,\cancel{\operatorname{sen}x}\cos x\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen}x}}=2\cos^2x$$

formule di duplicazione

Quindi

$$\lim_{x\to0^+}\left[\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{cotg}x\right]=\lim_{x\to0^+}\left(2\underset{\downarrow\,1}{\cos^2x}\right)=$$

$$=2\cdot1=\boxed{2}$$

CASO $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

→ si raccoglie la x con il grado max del num. e del den.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{4x^2-5x+1}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(3+\overset{\nearrow 0}{\frac{5}{x}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(4-\underset{\searrow 0}{\frac{5}{x}}+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-2x^2+1}{3x^2-2x+6}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{+\infty\,\nwarrow}{x^{\cancel{5}\,3}}\left(1-\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x^3}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^5}}\right)}{\cancel{x^2}\left(3-\underset{\searrow 0}{\frac{2}{x}}+\underset{\searrow 0}{\frac{6}{x^2}}\right)}=\frac{+\infty\cdot1}{3}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^3+2x}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^3+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}\right)}{x\cdot\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{2}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

In generale

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+\ldots+a_n}{b_0x^m+\ldots+b_m}=\begin{cases}\pm\infty & \text{se } n>m\\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n=m\\ 0 & \text{se } n<m\end{cases}$$

grado ↓

Si guarda il grado del numeratore e del denominatore.

> Quando si ha una forma indeterminata il risultato del limite non si può decidere se non eseguendo operazioni algebriche sulle funzione.

CASO $\boxed{\frac{0}{0}}$

Si scompone in fattori il num. e il denom. e si semplifica

① $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

② $$\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\boxed{\infty}$$

③ $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}=\frac{0}{0}$$

Applico la regola di Ruffini per scomporre il numeratore e il denominatore anche se potrei ricordare che:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

con x_1, x_2 radici dell'eq. $ax^2+bx+c=0$

Numeratore:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -2 & -3\\ 3 & & 3 & 3\\ \hline & 1 & 1 & 0\end{array}\qquad x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$

$(x+1)$

Denominatore:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & -9 & +9\\ 3 & & 6 & -9\\ \hline & 2 & -3 & 0\end{array}\qquad 2x^2-9x+9==(x-3)(2x-3)$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}=\lim_{x\to3}\frac{(\cancel{x-3})(x+1)}{(\cancel{x-3})(2x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{3+1}{6-3}=\boxed{\frac{4}{3}}$$