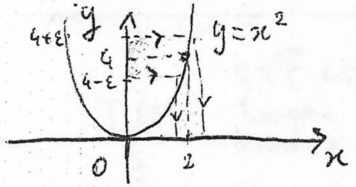
FUNZIONI CONTINUE

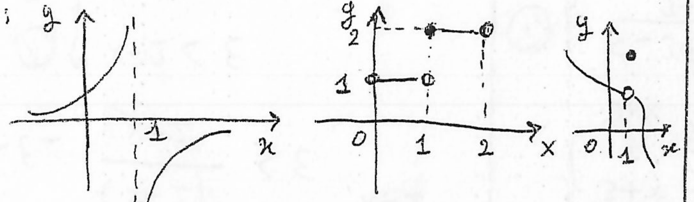
Es:



$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

def. informale: una funzione è continua se posso disegnarla senza mai staccare la penna dal foglio.

Es:



questa funzione non è continua in $x = 1$

la funzione non è continua in $x = 1$

DEFINIZIONE (FORMALE) DI FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a,b]$ e c un punto interno all'intervallo.

La funzione $f(x)$ si dice CONTINUA nel punto c quando esiste il limite per $x \to c$ e

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

quindi:

1) $\exists\ f(c)$

2) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$ (finito $\in R$)

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

ELENCO DELLE FUNZIONI CONTINUE

Funzione	CONTINUE DOVE? Nel loro dominio
$f(x) = k$	$\forall x \in R$
$f(x) = x$	$\forall x \in R$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n pari	$x \geq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n dispari	$\forall x \in R$
$f(x) = a^x$ $a > 0$	$\forall x \in R$
$f(x) = log_a x$ $a > 0,\ a \neq 1$	$x > 0$
$f(x) = sen\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = cos\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = tg\ x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = cotg\ x$	$x \neq k\pi$
$f(x) = arc\ sen\ x$	$-1 \leq x \leq 1$
$f(x) = arc\ cos\ x$	$-1 \leq x \leq 1$
$f(x) = arc\ tg\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = arc\ cotg\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$	$\forall x \in R$

Tutti i polinomi sono funzioni continue.

N.B. Ciascuna di tali funzioni è continua in ogni punto del proprio dominio.

Le funzioni razionali fratte $y = \frac{P(x)}{D(x)}$ sono continue in ogni punto di R tranne che nei punti che annullano il denominatore. ($\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots \frac{1}{x^n}$ continue in $R - \{0\}$)

Quindi per calcolare il limite di funzioni continue in un punto c (es. la funzione polinomiale) è sufficiente calcolare il loro valore in c, ossia sostituire a x il valore di c.

Es: $\lim_{x \to 2} (3x-1) = 5$ perché $3 \cdot 2 - 1 = 5$

Ciò vale anche se la funzione è composta

$\boxed{x} \xrightarrow{A} \boxed{z = x+2} \xrightarrow{B} \boxed{y = 3^z = 3^{x+2}}$ (g, f, C)

Funzione composta: $y = f(g(x)) = 3^{x+2}$

dove $z = g(x)$, $y = f(z)$

$$\lim_{x \to 2} 3^{x+2} = 3^{2+2} = 3^4$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{3x-2} = \sqrt{7}$$

$$\lim_{x \to 0} log(1-x) = log\,1 = 0$$

$$\lim_{x \to \pi} sen\,2x = sen\,2\pi = 0$$

$$\lim_{x \to 2\pi} cos\frac{x}{2} = cos\frac{2\pi}{2} = cos\,\pi = -1$$

Il simbolo di limite si può "portare dentro" al simbolo f di una funzione continua.

Es: $\lim_{x \to 2\pi} cos\frac{x}{2} = cos\left(\lim_{x \to 2\pi}\frac{x}{2}\right) = cos\frac{2\pi}{2} = cos\,\pi = -1$

Es: $\lim_{x \to 3} \sqrt{3x-2} = \sqrt{\lim_{x \to 3}(3x-2)} = \sqrt{3 \cdot 3 - 2} = \sqrt{7}$

Es: $\lim_{x \to 2} 3^{x+2} = 3^{\lim_{x \to 2}(x+2)} = 3^{(2+2)} = 3^4$

In generale: se f e g sono funzioni continue anche $f(g(x))$ è continua e:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$