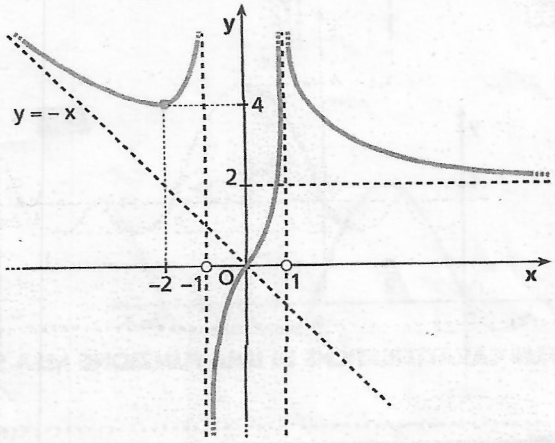
DAL GRAFICO DI UNA FUNZIONE ALLE SUE CARATTERISTICHE

ESERCIZIO GUIDA

339 Sia $f(x)$ la funzione rappresentata nel grafico riportato a lato.
Dalla figura deduciamo:
1. il campo di esistenza;
2. le intersezioni con gli assi;
3. gli intervalli in cui la funzione è positiva e negativa;
4. i limiti agli estremi del campo di esistenza e le equazioni degli asintoti;
5. i punti di massimo e di minimo;
6. i punti di flesso evidenziando la concavità.



1. Il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, perché in $x = \pm 1$ $f(x)$ non è definita.
2. L'intersezione con gli assi si ha in $O(0; 0)$.
3. $f(x) > 0$ per $x < -1$ v $(x > 0, x \neq 1)$,
   $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.
4. Si ha

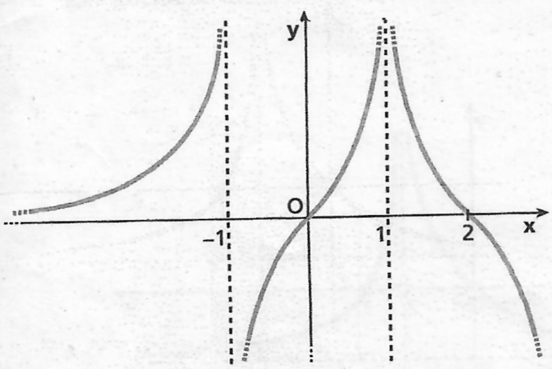
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Gli asintoti sono: $x = \pm 1$ asintoti verticali,
$y = 2$ asintoto orizzontale (a destra),
$y = -x$ asintoto obliquo (a sinistra).

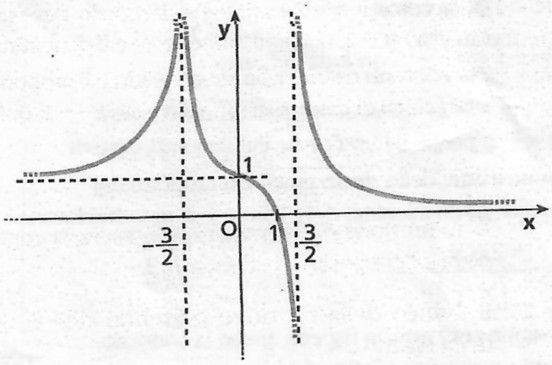
5. $f(x)$ presenta un punto di minimo di coordinate $(-2; 4)$.
6. $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x < -1$ v $(x > 0, x \neq 1)$ e volge la concavità verso il basso per $-1 < x < 0$. Il punto $O(0; 0)$ è un flesso obliquo ascendente.

Dalla figura rappresentata in ogni grafico deduci:
1. il campo di esistenza;
2. le intersezioni con gli assi;
3. gli intervalli in cui la funzione è positiva e negativa;
4. i limiti agli estremi del campo di esistenza e le equazioni degli asintoti;
5. i punti di massimo e minimo;
6. i punti di flesso, evidenziando la concavità.

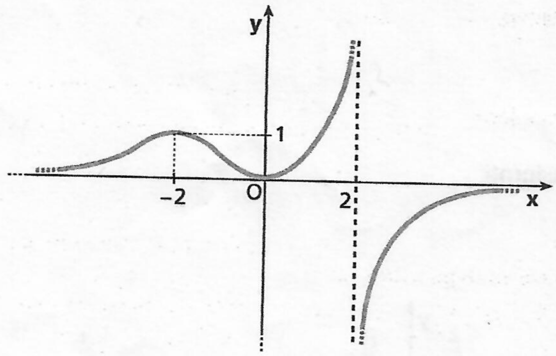
340



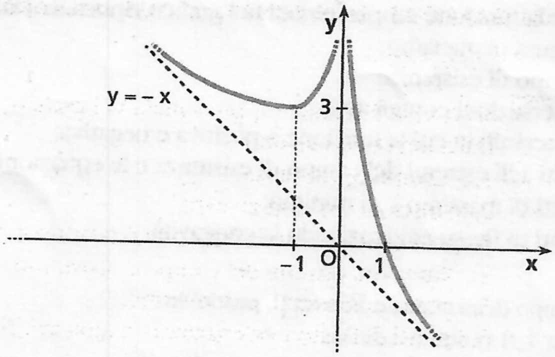
341



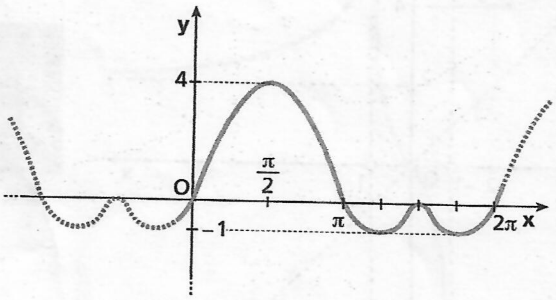
342



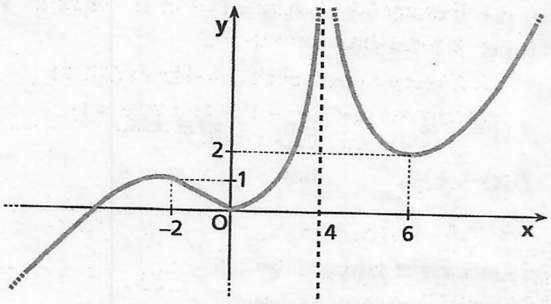
344



343



345



DALLE CARATTERISTICHE DI UNA FUNZIONE ALLA SUA ESPRESSIONE ANALITICA

ESERCIZIO GUIDA

346 **Scriviamo l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che presenta le seguenti caratteristiche:**
1. il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{2\}$;
2. i punti di intersezione con gli assi sono $O(0; 0)$ e $A(3; 0)$;
3. $x = 2$ è asintoto verticale e $y = -2$ è asintoto orizzontale;
4. $f(x) > 0$ per $0 < x < 3$.

1. Consideriamo che il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{2\}$, e $x = 2$ è asintoto verticale. Possiamo scrivere, come funzione che ha queste caratteristiche, $f(x) = \dfrac{N(x)}{x-2}$, con $N(x)$ espressione da precisare.

2. La funzione $f(x)$ passa per l'origine e per $A(3; 0)$, quindi $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$, ossia $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 3$, perciò deve essere

$$f(x) = \frac{kx(x-3)}{x-2}, \text{ con } k \text{ da definire.}$$

3. Siccome $y = -2$ è asintoto orizzontale, deve essere $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, perciò il numeratore e il denominatore di $f(x)$ devono essere dello stesso grado e il rapporto dei coefficienti di grado massimo deve essere -2; quindi si ha:

$$f(x) = \frac{-2x(x-3)}{(x-2)^2}.$$

4. La funzione $f(x)$ trovata rispetta anche la condizione di essere positiva per $0 < x < 3$.

Il grafico della funzione potrebbe essere quello della figura.