Funzioni-Limiti

1. Definizione di funzione.
2. Forma esplicita e implicita
3. Dominio (campo di esistenza), codominio.
4. Classificazione delle funzioni (algebriche, trascendenti)
5. Definizione di funzione crescente, decrescente (funzione monotona)
6. Funzioni pari, dispari.
7. Funzioni periodiche.
8. Funzione composta $f \circ g = f(g(x))$
9. Segno di una funzione.
10. Intersezione con gli assi.
11. Calcolo dei limiti nei casi più comuni: forme indeterminate $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; +\infty - \infty$.
12. Definizione di funzione continua in un punto.

Definizione di funzione continua

Una funzione *f(x)*, definita in un intervallo **I** , si dice continua in un punto ***x* = *c*** dell'intervallo se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

ossia se valgono le seguenti condizioni:

- esiste finito il limite per x che tende a c della *f(x)*: ***esiste l finito;***
- esiste il valore della funzione nel punto c: ***esiste f(c) ;***
- il valore del limite e della funzione nel punto c coincidono: ***l = f(c).***

Se manca una sola di queste condizioni la funzione non è continua e allora si parla di discontinuità .
Una funzione è continua in un intervallo se lo è in tutti i punti dell'intervallo.

Intuitivamente:

Sono continue le funzioni che si tracciano senza mai staccare la penna dal foglio **.**

13. Continuità a sinistra e a destra di un punto.
14. Quali sono le funzioni continue?

15. Punti di discontinuità di prima, seconda e terza specie o eliminabile

Si ha una **discontinuità di 1ª specie o di tipo "salto"** quando esistono, al tendere di x a x_0, sia il limite sinistro che il limite destro, e sono entrambi finiti, ma sono diversi fra loro, cosicché nell'attraversamento dell'ascissa x_0 si ha, appunto, un "salto", uguale alla differenza fra il limite destro e quello sinistro. Esempi:

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1;\ \text{salto} = |1 - (-1)| = 2$$

Si ha una **discontinuità di 2ª specie** quando, al tendere di x a x_0, almeno uno fra i due limiti sinistro e destro o non esiste, oppure esiste ma è infinito. Esempi:

Si ha una **discontinuità di 3ª specie (discont. di tipo "buco", discont. "eliminabile")** quando, al tendere di x a x_0, la funzione tende ad un limite finito l , che però non coincide con $f(x_0)$, o per il fatto che $f(x_0) \neq l$ oppure per il fatto che $f(x_0)$ non esiste, cioè la funzione non è definita in x_0.

16. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui: condizioni per l'esistenza.

Esercizi:

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni, dopo averle *classificate*:

$y=\dfrac{1-x^2}{1-3x}$ $\quad y=\dfrac{1-2x+x^2}{4-x^2}$ $\quad y=\dfrac{1-2x+x^2}{x^2-5x-7}$ $\quad y=\dfrac{x-3}{5+2x-3x^2}$

$y=\sqrt{4x^2-7x-2}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{x}$ $\quad y=\sqrt[3]{\dfrac{1-7x}{25-x^2}}$ $\quad y=\dfrac{1-4x^2}{\sqrt{x+5}}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt[7]{3-x}}{\sqrt[4]{x^2-4x}}$

$y=\sqrt{2-x}-\sqrt{1-6x-7x^2}$

$y=e^{\frac{x}{2}}$ $\quad y=e^{\frac{x^2-1}{x}}$ $\quad y=3^{x-4}$ $\quad y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad y=2^{\sqrt{2x-1}}$ $\quad y=2^{\frac{x-8}{x^2+4}}$

$y=\log(1-x)$ $\quad y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right)$ $\quad y=\log_2\sqrt{x}$ $\quad y=\log_2\sqrt{1-x}$ $\quad y=\log_2\sqrt[3]{\dfrac{4+3x}{x}}$

$y=log\left(\dfrac{1-x^2}{5x-2}\right)$ $\quad y=\dfrac{\log\left(1-x^2\right)}{5x-2}$ $\quad y=\dfrac{5x-2}{\log\left(1-x^2\right)}$

Dopo aver determinato l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni, determinare le eventuali simmetrie (pari, dispari), il segno, i punti di intersezione con gli assi e il relativo grafico probabile:

$y=\dfrac{3x-4}{2-x}$ $\quad y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ $\quad y=\dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad y=\dfrac{x-1}{2x^2+7x-4}$

$y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$ $\quad y=x\sqrt{1-4x^2}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt{4x^2-x}}{1-x}$