

FUNZIONE ESPONENZIALE

1) **Definizione di potenza:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ a base n esponente a^n potenza

Proprietà delle potenze: $a, b \in \mathfrak{R}^+$

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0; \quad a^1 = a; \quad 1^n = 1; \quad 0^n = 0 \text{ con } n \neq 0;$$

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{Es: } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{Es: } \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$$

$$3) \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$4) \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

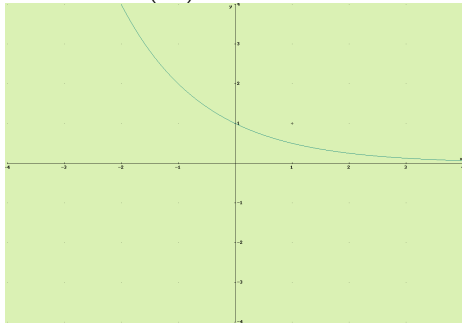
2) Definizione di funzione esponenziale

Una funzione si dice esponenziale se l'incognita compare all'esponente $f: x \rightarrow a^x$, con $a \in \mathfrak{R}_0^+ - \{1\}$

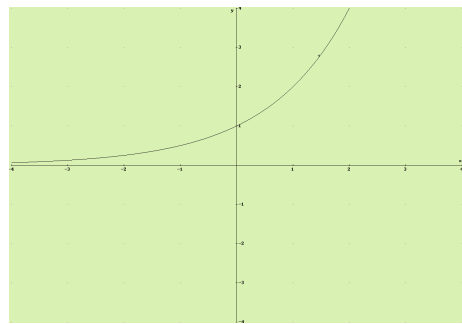
Tale funzione assume valori reali $\forall x \in \mathfrak{R}$, pertanto ha come dominio (insieme di valori che posso attribuire alla x affinché la y sia calcolabile) tutti i numeri reali: $D = \mathfrak{R}$. Mentre l'insieme delle immagini (i valori assunti dalla variabile y) sono tutti i numeri positivi: $f(D) = \mathfrak{R}^+$.

Distinguiamo due casi: $0 < a < 1$ e $a > 1$

Esempi: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, 0 < a < 1$



$y = 2^x, a > 1$



se $0 < a < 1$ è decrescente.

se $a > 1 \rightarrow$ è crescente.,

3) Definizione di logaritmo.

Il logaritmo di un numero b positivo, in una base a , con $a > 1$ e $a \neq 1$, è l'esponente da dare ad a per ottenere b . In simboli $a^{\log_a b} = b$.

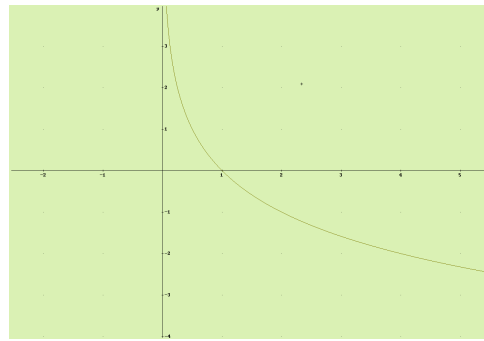
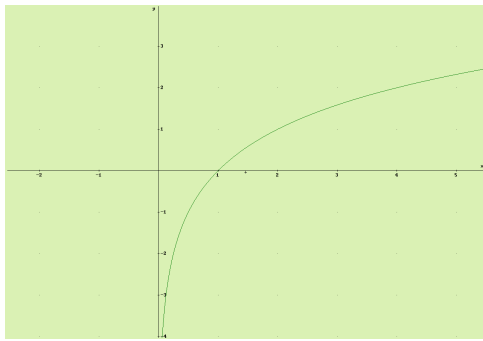
La soluzione dell'equazione $a^x = b$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, ammette una e una sola soluzione per ogni $b > 0$ e viene indicata con il simbolo $x = \log_a b$.

4) Definizione di funzione logaritmica.

La funzione $f: x \rightarrow \log_a x$ definita per tutti i numeri positivi, con $a \in \mathfrak{R}_0^+ - \{1\}$ è l'inversa della funzione esponenziale.

Esempi: $y = \log_2 x, 0 < a < 1$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x, a > 1$



5) **Proprietà della funzione logaritmica:** (seguono dalle proprietà delle potenze)

$$\forall a \quad a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \quad \log_a a^n = n$$

$$\forall a \quad a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1 \quad a^{\log_a n} = n \quad (\text{segue direttamente dalla definizione } a^x = n \Leftrightarrow x = \log_a n)$$

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a n^m = m \log_a n$$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad (\text{formula del cambiamento di base})$$

Esercizi:

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

1. $3^x = 27$

$$S = \{3\}$$

2. $5^{x+3} = 2^x \cdot 8$

$$S = \{-3\}$$

3. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x+1} = 31$

$$S = \{2\}$$

4. $9^x - 7 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^x$

$$S = \{2\}$$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

1. $3^x > 27$

$$S = \{x > 3\}$$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 32$

$$S = \{x > -5\}$$

3. $5^{x+3} < 2^x \cdot 8$

4. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x+1} > 31$

5. $9^x - 7 \cdot 3^x < 2 \cdot 3^x$

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

1. $\log_3(3x-4) = 2$

$$S = \left\{ \frac{13}{3} \right\}$$

2. $2\text{Log}(x+3) = \text{Log}(x-1) + 4\text{Log}2$

$$S = \{5\}$$

3. $\frac{1}{2}\log_2 x + \log_4 x = 2$

$$S = \{4\}$$

4. $\log_3(2-3^x) + x = 0$

$$S = \{0\}$$

5. $\frac{\text{Log}(7-6x)}{\text{Log}x} = 2$

$$S = \{1\}$$

6. $3\log_3^2 x + 5\log_3 x - 2 = 0$

$$S = \left\{ \frac{1}{9}, \sqrt[3]{3} \right\}$$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

1. $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$

$$S = \{x > 5\}$$

$$2. \text{Log}(x-3) < 1$$

$$3. \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2$$

$$4. (\log_3 x)^2 - \log_3 x < 0$$

$$5. \text{LogLog}(x^2 - 6) < 0$$

$$S = \{3 < x < 13\}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$$

$$S = \{1 < x < 3\}$$

$$S = \left\{-4 < x < -\sqrt{7}; \sqrt{7} < x < 4\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}\right\}$$