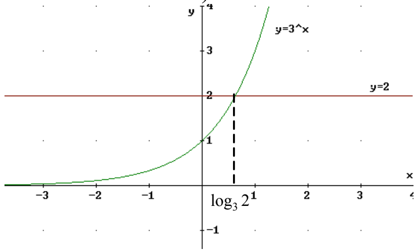
Equazioni e disequazioni logaritmiche

LOGARITMI

Come si risolve l'equazione $3^x = 2$?
Ossia esiste l'esponente da dare alla base 3 per ottenere 2? Come lo posso calcolare? La risposta è: esiste e si può calcolare.
Dal grafico si osserva che le due funzioni $y = 3^x$ e $y = 2$ si intersecano nel punto $\bar{x}$ che per definizione è uguale a $\boxed{\log_3 2}$ (si legge logaritmo in base 3 di 2)



Praticamente applico l'operazione inversa dell'esponenziale che si chiama logaritmo.

Definizione di logaritmo:

$$\boxed{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b}$$

(a si chiama base, b si chiama argomento o numero)

Si chiama **logaritmo in base *a* di *b* e si indica con $\log_a b$ l'esponente *x* da assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b*.**

Le basi più usate sono:

base 10 → $10^x = b \quad x = \log_{10} b = Log\, b$

(Logaritmi decimali)

base *e* $\quad e^x = b \quad x = \log_e b = \log b = \ln b$

(Logaritmi naturali o neperiani)

(*e* numero di Nepero $e = 2{,}7182\ldots$)

Se *a* e *b* non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi :

$$3^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_3 = 2$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, x \in \Re$

$a^{\log_a b} = b$

$\log_a 1 = 0 \quad$ *poichè* $a^0 = 1$

$\log_a a^c = c \quad$ es. $3 = \log_2 2^3$

1) $\log_a m + \log_a n = \log_a (n \cdot m) \qquad m > 0, n > 0$

2) $\log_a m - \log_a n = \log_a \left(\dfrac{m}{n} \right)$

3) $\log_a \dfrac{1}{n} = -\log_a n$

4) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b \qquad a > 0,\ a \neq 1, b > 0$

5) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b \qquad n \in N_0$

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

formula del cambiamento di base

7) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \qquad a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$

(seguono dalle proprietà delle potenze)

Esempio di equazione esponenziale risolubile tramite i logaritmi.

Risolviamo l'equazione: $\quad 5 \cdot 3^x = 7$

Poiché il logaritmo è una funzione biunivoca, possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

$$Log\left(5 \cdot 3^3\right) = Log7$$

$Log5 + Log3^x = Log7 \quad$ proprietà 2) dei log.

$Log5 + x \cdot Log3 = Log7 \quad$ proprietà 1) dei log.

Isolando *x* otteniamo: $x = \dfrac{Log7 - Log5}{Log3} \quad (*)$

In alternativa potevamo isolare 3^x, ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = log_3 \frac{7}{5} = log_3 7 - log_3 5$$

Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si riottiene (*).

Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$y = log_a x \quad$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ fissato, $\quad x \in \mathbf{R}^+$.

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.
Il ***dominio*** della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a ***x* è $\mathbf{R}^+$** ;
il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è **R** .

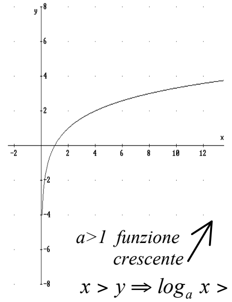
GRAFICO DELLA FUNZIONE *$y=log_a x$, $x>0$*

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$).

Si distinguono due casi:

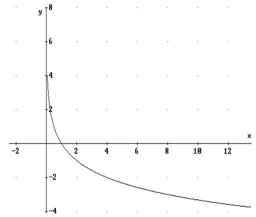
a>1 (es. a=2)
$y = log_2 x$

0<a<1 (es. a=1/2)
$y = log_{1/2} x$



a>1 funzione crescente

$x > y \Rightarrow log_a x > log_a y$



0<a<1 funzione decrescente

$x > y \Rightarrow log_a x < log_a y$;

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare nell'argomento di uno o più logaritmi.
Prima di risolvere l'equazione calcolo il C.E. (*dominio dell'equazione*) ossia i valori che l'incognita *x* può assumere affinché l'equazione abbia senso. **<u>Quindi tutti gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi.</u>**

Es. 1 $\quad 2Logx = Log25 \quad$ **C.E.** x>0

$Logx^2 = Log25$

$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \quad$ x=-5 non acc.

La soluzione è x=5.

Es. 2 $\quad \log_2 (3x - 2) = 4 \qquad$ **C.E.** 3x - 2>0

Per def. $3x - 2 = 2^4$ perciò si ha

$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2/3 \\ x = 6 \end{cases}$ *soluzione accettabile*

Es. 3 $\quad 2Log(x+3) = Log(x-1) + 4Log2$

C.E. $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \end{cases}$

$Log(x+3)^2 = Log(x-1) + Log2^4$

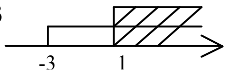
$Log(x+3)^2 = Log16(x-1) \quad$ passiamo agli argomenti $\quad (x+3)^2 = 16(x-1) \quad$ perciò si ha

Equazioni e disequazioni logaritmiche

$$\begin{cases}x+3>0\\x-1>0\\x^2+6x+9=16x-16\end{cases}\qquad\begin{cases}x>-3\\x>1\\x^2-10x+25=0\end{cases}$$

$x=5\pm\sqrt{25-25}=5$

$$\begin{cases}x>-3\\x>1\\x=5\end{cases}$$



$$\begin{cases}x>1\\x=5\ sol.\ acc.\end{cases}$$

Es. 4 $\log_3(x+1)-\log_3(x-2)=\log_3 x-2$

C.E. $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\x>2\\x>0\end{cases}\Rightarrow x>2$

Per la propr.3) e osservando che $2=\log_3 3^2$

$$log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha:

$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x}{9}$ $\quad C.E.\ x-2\neq0\rightarrow\quad x\neq2$

$\Rightarrow x^2-11x-9=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{157}}{2}$

Il valore $x=\frac{11-\sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da: $x=\frac{11+\sqrt{157}}{2}$

Es. 5 $4\log_2 x-3\log_8 x=6$ C.E. $x>0$

$4\log_2 x-3\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=6\qquad 4\log_2 x-\cancel{3}\frac{\log_2 x}{\cancel{3}}=6$

$3\log_2 x=6\quad \log_2 x=2\quad x=2^2=4$

$$\begin{cases}x>0\\x=4\quad soluz.\ accett.\end{cases}$$

Es. 6 $Logx^2+\frac{1}{Logx}=3$

C.E. $\begin{cases}x>0\\Logx\neq0\end{cases}\quad\begin{cases}x>0\\x\neq1\end{cases}$

$2Logx^2-3Logx+1=0$ poniamo $y=Logx$

$2y^2-3y+1=0$

$y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}\quad y=1\quad y=\frac{1}{2}$

$Logx=1\rightarrow x=10$ *soluz. accett.*

$Logx=\frac{1}{2}\rightarrow x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ *soluz. accett.*

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Una disequazione si dice logaritmica se l'incognita compare come argomento di uno o più logaritmi.

$$\log_a f(x)\le\log_a g(x)$$

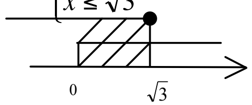
se *a*>1 *f(x)≤ g(x)* $\rightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)\le g(x)\end{cases}$

se 0<*a*<1 *f(x) ≥g(x)* $\rightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)\ge g(x)\end{cases}$

Es. 1 $2\log_3 x-1\le0$ **C.E.** $x>0$

$\log_3 x\le\frac{1}{2}\qquad\log_3 x\le\log_3 3^{\frac{1}{2}}\qquad x\le3^{\frac{1}{2}}$

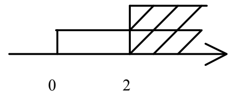
$x\le\sqrt{3}\ \rightarrow\begin{cases}x>0\\x\le\sqrt{3}\end{cases}$



S: $0<x\le\sqrt{3}$

Es. 2 $\log_{\frac{1}{2}}x<-1$ **C.E.** $x>0$

$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\rightarrow x>2\qquad\begin{cases}x>0\\x>2\end{cases}$



S: $x>2$

Es. 3 $\log_3(x-3)-\log_3 x\ge2\log_{\frac{1}{2}}2$

C.E. $\begin{cases}x-3>0\\x>0\end{cases}$ cioè $x>3$

Poiché $2\log_{\frac{1}{2}}2=-2=\log_3\frac{1}{9}$ allora,

$\log_3(x-3)\ge\log_3 x+\log_3\frac{1}{9}$

$\log_3(x-3)\ge\log_3\frac{1}{9}x$ poiché la base è >1

$x-3>\frac{1}{9}x\rightarrow\begin{cases}x>0\\x>3\\x\ge\frac{27}{8}\end{cases}$ quindi $x\ge\frac{27}{8}$

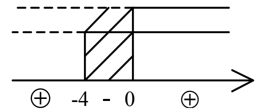
Es. 4 $\log_2{}^2 x+4\log_2 x<0$ **ossia**

$(\log_2 x)^2+4\log_2 x<0$ C.E. $x>0$

poniamo $y=\log_2 x$

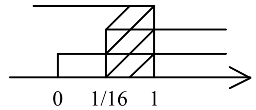
$y^2+4y<0\quad y^2+4y=0\quad y(y+4)=0$

$y=0\quad y=-4$



da cui $-4<y<0$ ossia $-4<\log_2 x<0$

$$\begin{cases}x>0\\-4<\log_2 x<0\end{cases}\quad\begin{cases}x>0\\\log_2 x>-4\\\log_2 x<0\end{cases}\quad\begin{cases}x>0\\x>\frac{1}{16}\\x<1\end{cases}$$



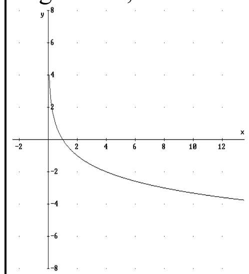
S: $\frac{1}{16}<x<1$

Es. 5 $\log_{\frac{1}{2}}\log_3(2x-5)>0$

$\log_{\frac{1}{2}}\log_3(2x-5)>\log_{\frac{1}{2}}1$

C.E. $\begin{cases}2x-5>0\\\log_3(2x-5)>0\end{cases}$

Per risolvere la disequazione passo agli argomenti, dato che ho due logaritmi con la stessa base ad entrambi i membri.



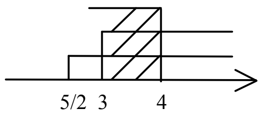
Il logaritmo con la base minore di 1 è decrescente. Quindi cambia il verso della disequazione che diventa:

$$\log_3(2x-5)<1$$

Le soluzioni finali saranno accettabili se sono verificate contemporaneamente le condizioni di esistenza dei logaritmi:

$$\begin{cases} 2x-5>0 \\ \log_3(2x-5)>0 \\ \log_3(2x-5)<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5>0 \\ \log_3(2x-5)>\log_3 1 \\ \log_3(2x-5)<\log_3 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ 2x-5>1 \\ 2x-5<3 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x>3 \\ x<4 \end{cases}$$



S: $3<x<4$