Esponenziali e logaritmi

ESPONENZIALI

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

se $a > 0$, $\forall$ (per ogni) $x \in \Re$;
se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \Re^+$;
se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbb{Z}$;

Sono definite: $\left(-\sqrt{3}\right)^2$, $7^{\frac{2}{3}}$, $3^{-\sqrt{2}}$

Non sono definite:
- le potenze con base zero ed esponente nullo o negativo: 0^0, 0^{-2}, $0^{-\sqrt{3}}$, …..
- le potenze con base un numero negativo ed esponente razionale o irrazionale:

$$(-2)^{\frac{3}{4}}, (-3)^{\sqrt{5}}, \ldots$$

Casi particolari per la potenza a^x:
se $a = 1 \Rightarrow 1^x = 1$, $\forall$ (per ogni) $x \in \Re$;
se $x = 0 \Rightarrow a^0 = 1$, $\forall$ (per ogni) $a \in \Re^+$;

Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a **R** vale:

1. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$
6. $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$ $\forall a \in \Re$, $a \geq 0$, $x \in$ N ed $y \in$ N-{0}
7. $a^{-\frac{x}{y}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{x}{y}}$ $\forall a \in \Re$, $a > 0$, $x \in$ N ed $y \in$ N-{0}

Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo:

$y = a^x$, con $a > 0$ fissato, $x \in \mathbf{R}$.

Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto **R** ;

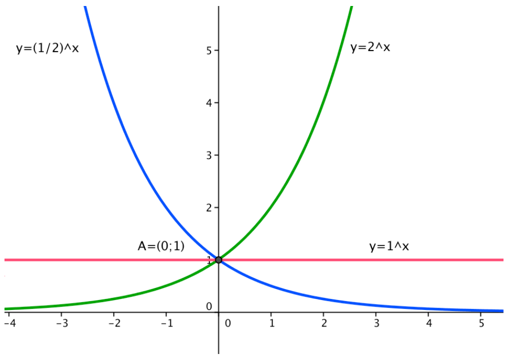
il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi: $y = a^x$
se $a > 1$ la funzione è strettamente crescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x1} < a^{x2}$$

se $a = 1$ la funzione è costante $a^x = 1$ $\forall a \in \Re$
se $0 < a < 1$ la funzione è strettamente decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x1} > a^{x2}$

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi.



EQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

Equazione esponenziale elementare del tipo:

$$a^x = b, \quad con\ a > 0\ e\ b > 0$$

a è la base
x è l'incognita dell'equazione, esponente
Poniamo $a \neq 1$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile, indeterminata* o *determinata*:
impossibile se $b \leq 0$ $\quad es.\ 2^x = -1$
oppure se $b \neq 1\ e\ a = 1$ $\quad es. 1^x = 5$
indeterminata se a=1, b=1 es. $1^x = 1$
determinata se $a > 0, a \neq 1, b > 0$
$es. 3^x = 5$

1° caso: STESSA BASE
cioè equazioni riconducibili alla forma

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

Due potenze con la stessa base sono uguali se e solo se sono uguali gli esponenti. Questo segue dal fatto che la funzione esponenziale è continua e strettamente crescente (a>1) o strettamente decrescente (0<a<1) quindi vale la proprietà:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$\forall\ a \in \Re^+ - \{1\}\ e\ \forall x_1, x_2 \in \Re$$

Esempi:
1) $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x=3$
2) $(a^{2x})^3 = a^{x^2} \Rightarrow 6x = x^2 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$
x(x-6)=0 legge di annullamento del prodotto
→ $x=0 \vee x=6$

3) $\frac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{2^{5x}}}{2^{x^2-4}} = 2^0 \Rightarrow \frac{2^{\frac{5x}{3}}}{2^{x^2-4}} = 2^0$
$\Rightarrow 2^{\frac{5x}{3}-(x^2-4)} = 2^0 \Rightarrow \frac{5}{3}x - x^2 + 4 = 0$
$3x^2 - 5x - 12 = 0 \Rightarrow \quad x = 3$ e $x = -\frac{4}{3}$

2° caso: STESSO ESPONENTE
cioè equazioni riconducibili alla forma

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0}$$

(infatti si ottiene $\boldsymbol{\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1} \longrightarrow \left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{f(x)}} = \left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{0}}$
da cui, tornando al caso 1, $f(x) = 0$)

Esempio:

$$25 \cdot 3^x = 9 \cdot 5^x \longrightarrow 5^2 \cdot 3^x = 3^2 \cdot 5^x$$
$$\frac{3^x}{3^2} = \frac{5^x}{5^2} \longrightarrow 3^{x-2} = 5^{x-2} \longrightarrow$$
$$x - 2 = 0 \quad \longrightarrow x = 2$$

3° caso: SOMME DI ESPONENTI CON LE STESSE BASI

1. $8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16$, osserviamo che per le proprietà delle potenze:

$2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ e $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$

quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

$$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2^x \cdot 2 = 16$$
$$4 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2 = 16$$

mettiamo in evidenza 2 e 2^x.

$$2 \cdot 2^x \cdot (2 - 1) = 2^4$$
$$2^x = \frac{2^4}{2} \qquad 2^x = 2^3$$

Pertanto uguagliando gli esponenti (basi uguali) la soluzione dell'equazione data è x=3.

4° caso: SOMME DI ESPONENTI CON LE BASI DIVERSE

Esempi

1) Risolviamo l'equazione:

$$4^x = 2^x + 2$$

Introduciamo una variabile ausiliaria, t :
$2^x = t$
$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$
e ottenimo una equazione di 2° grado in t:

$t^2 = t + 2$ da cui, $t^2 - t - 2 = 0$

le cui soluzioni sono: $t = -2$, $t = 1$
Da cui :
$2^x = -2$ impossibile
$2^x = 1 \longrightarrow x = 0$

2) $2^x + 2^{3-x} = 6$
Osserviamo che:

$$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}$$

Esponenziali e logaritmi

L'equazione assegnata è equivalente a:

$$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, è sempre diverso da zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:

$$\left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di 2° grado nell'incognita 2^x.

Risolvendo (si può introdurre unaa variabile ausiliaria $t = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado) si ha:

$$2^x = 2 \quad \text{oppure} \quad 2^x = 4$$

da cui:

$$x = 1 \quad \text{oppure} \quad x = 2$$

5° caso: BASI ED ESPONENTI DIVERSI

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}$$

occorre passare alla funzione inversa.
Se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi.

Che cosa è un logaritmo? E' una delle operazioni inverse della potenza, in particolare è l'operazione inversa della potenza quando l'incognita è all'esponente.
Qual è l'esponente da dare s 2 per trovare 3?

$$2^x = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = log_2 3.$$

Si dà il nome di logaritmo all'esponente x.
Quindi il logaritmo è un'ESPONENTE;
il logaritmo è l'esponente a cui devo elevare la *base* 2 per ottenere il numero 3, che nel logaritmo si chiama *argomento*.

Esempio:
$\log_3 9 = 2$ perché il logaritmo è l'esponente a cui devo elevare la base 3 per ottenere l'argomento 9: infatti $3^2 = 9$

Definizione di logaritmo:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

fissata la base a>0 , deve essere b>0.
Si chiama **logaritmo in base *a* di *b*** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'**esponente** x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.

Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$y = log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ fissato, $x \in \mathbf{R}^+$

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

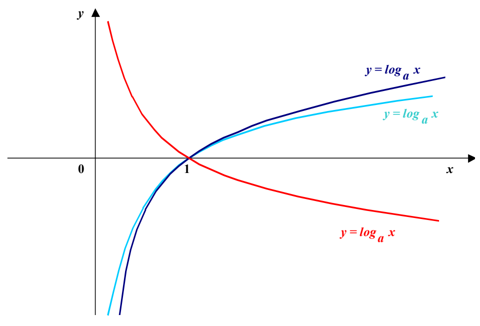
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $\mathbf{R}^+$;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori y che la funzione assume è $\mathbf{R}$.

Si distinguono due casi:

se $a > 1$, la funzione è crescente (def::
$\forall x_1, x_1 \in R, x_2 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$)

se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente (def.:
$\forall x_1, x_1 \in R, x_2 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$)



I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (y = x); essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi.

Abbiamo detto che:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

fissata la base a>0 , deve essere b>0.

Valgono i casi particolari:

$log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$; $log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

Proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a x^y = y \cdot \log x$ $\quad (x \in \mathbf{R}^+ \;;\; y \in \mathbf{R},\ a > 0)$;
2) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ $\quad (x \in \mathbf{R}^+ \;;\; y \in \mathbf{R}^+, a > 0)$;
3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad (x \in \mathbf{R}^+ \;;\; y \in \mathbf{R}^+, a > 0)$;
4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\quad (a, b, c > 0)$; formula di car

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base a=10 oppure in base $a = e \approx 2{,}718$ (Numero di Nepero)

$\log x$ indica il logaritmo in base 10, detto anche *logaritmo decimale*;
$\ln x$, indica il logaritmo in base e $\log_e x$, detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$\log_a x = b, con\ a > 0\ e\ b \in R;\ x > 0$$

x è l'incognita e si chiama ARGOMENTO
a è la base del logaritmo che può essere a>0 o 0<a<1
b è il numero che può essere un numero reale qualsiasi

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è $x = a^b$

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo

$$log_a A(x) = log_a B(x),$$

applicando le proprietà dei logaritmi;

2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;

3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;

4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione: $5 \cdot 3^x = 7$.

Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio i base 10) del primo e del secondo membro:

$$log\left(5 \cdot 3^x\right) = log\, 7.$$

Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi:

$$log\, 5 + log\, 3^x = log\, 7.$$

Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi:

$$log\, 5 + x \cdot log\, 3 = log\, 7.$$

Isolando x otteniamo:

$$x = \frac{log\, 7 - log\, 5}{log\, 3} \qquad (*)$$

Esponenziali e logaritmi

In alternativa potevamo isolare 3^x, ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = log_3 \frac{7}{5} = log_3 7 - log_3 5$$

Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si ottiene di nuovo (*).

2. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$log_3(x+1) - log_3(x-2) = log_3 x - 2$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x >$$

cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.
Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = log_3 3^2$:

$$log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \rightarrow x^2 - 11x - 9 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}$$

Il valore $x = \frac{11-\sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11+\sqrt{157}}{2}.$$

Esercizi

1.Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

a)

$3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

b)

$2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0.25}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\quad \sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

$2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

$8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$

$a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$

$2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$

$\left[\log 2 \frac{14}{5}\right]$

$4^x = 2^x - 2$

$3 \cdot 5^x = 7$

$3^x + 3^{1-x} = 4$

$3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$

$6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$

4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

$log_2(x-1) = 3$

$log(x-2) + log 5 = log x$

$log(x-2) - log(x-1) = log 5$

$2 \cdot log_2 x = 2 + log_2(x+3)$

$log(x-1) - 2 \cdot log(x+1) - log 8 = -2$