EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Definizione di potenza: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n\ volte}$

a base $\quad n$ esponente $\quad a^n$ potenza

Proprietà delle potenze: $a, b \in \Re^+$

$a^0 = 1$; $\quad a^1 = a$; $\quad 1^n = 1$; $\quad 0^n = 0 \quad n \neq 0$;

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad$ 3) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad$ 4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

5) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ $\quad$ Es: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\quad n \in N_0$ $\quad$ Es: $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

8) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, $\quad n \in N_0$

Definizione di funzione esponenziale

Una funzione si dice esponenziale se l'incognita compare all'esponente:

$f : x \to a^x$, con $a \in \Re_0^+ - \{1\}$

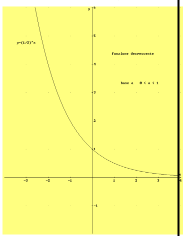
Tale funzione assume valori reali $\forall x \in \Re$,

Esempio: $y = a^x$, $\quad 0 < a < 1$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Def di funzione decrescente

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ (cambia il verso)



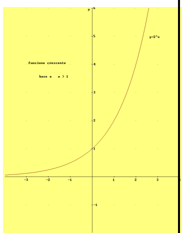
Esempio: $y = a^x$, base $a > 1$

$$y = 2^x$$

Def di funzione crescente

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

(si mantiene il verso)



Tutte le funzioni esponenziali passano dal punti (0; 1)

EQUAZIONI ESPONENZIALI
(l'incognita è all'esponente)

1° Caso

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Esempio:

$2^x = 16 \quad 2^x = 2^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4}$

$2^x = -16$ impossibile

$2^x = 0$ impossibile

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 16 \Rightarrow 2^{-x} = 2^4 \Rightarrow \boxed{x = -4}$

2° Caso

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$$

Infatti se divido ambo i membri per $b^{f(x)}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^0 \Rightarrow f(x) = 0$

Esempio:

$\dfrac{2^x \cdot 15}{2^3 + 1} = 40 \cdot 3^{x-4} \qquad \dfrac{2^x \cdot 15}{9} = 40 \cdot 3^{x-4}$

Isoliamo la x al primo membro:

$\dfrac{2^x \cdot 15}{9} \cdot \dfrac{9}{15} = 40 \cdot 3^{x-4} \cdot \dfrac{9}{15}$

$2^x = 8 \cdot 3 \cdot 3^{x-4} \qquad \dfrac{2^x}{2^3} = 3 \cdot 3^{x-4}$

$2^{x-3} = 3^{x-3}$

$\Rightarrow \dfrac{2^{x-3}}{3^{x-3}} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-3} = 1$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

3° Caso **Somma di potenze con la stessa base**

Esempio:

$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$

$2^x + 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} = 7$

$2^x + 2^x \cdot \dfrac{1}{2} + 2^x \cdot \dfrac{1}{4} = 7$

$2^x \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = 7$

$2^x \cdot \dfrac{7}{4} = 7 \Rightarrow \quad 2^x = 7 \cdot \dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow \quad 2^x = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

4° Caso **Somma di potenze con diversa base**

Esempio:

$9^x - 7 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^2$

$3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

Si pone $\boxed{3^x = y} \Rightarrow \quad 3^{2x} = y^2$

$y^2 - 7y - 18 = 0$

$y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2}$

$y_1 = \dfrac{7 + 11}{2} = 9 \qquad y_2 = \dfrac{7 - 11}{2} = -2$

Quindi andando a sostituire in $3^x = y$:

$3^x = 9 \quad 3^x = 3^2 \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

$3^x = -2$ $\quad$ impossibile

Casi particolari: $3^x = 0$ Impossibile $2^x = -1$ Impossibile, questo vale anche per le basi comprese tra 0 e 1.

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Si hanno gli stessi casi 1, 2, 3, 4 delle equazioni esponenziali con la seguente

REGOLA:

Se le basi sono maggiori di uno si ottiene una disequazione dello stesso verso tra gli esponenti.(Vedi grafico dell'esponenziale: in questo caso è crescente)

Se le basi sono comprese tra 0 e 1 si ottiene una disequazione di verso contrario tra gli esponenti. (Vedi grafico dell'esponenziale: in questo caso è decrescente)

Esempio: base maggiore di 1

$5^x < 25 \quad \Rightarrow \quad 5^x < 5^2 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

Il verso rimane lo stesso

Esempio: base compresa tra 0 e 1

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \dfrac{1}{32} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad x > 5$

Si inverte il verso della disequazione

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

1. $3^x = 27 \qquad S = \{3\}$
2. $5^{x+3} = 2^x \cdot 8 \qquad S = \{-3\}$
3. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x+1} = 31 \qquad S = \{2\}$
4. $2^{3-\sqrt{x}} + 2^{1+\sqrt{x}} = 10 \qquad S = \{0\}$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

1. $3^x > 27 \qquad S = \{x > 3\}$
2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 32 \qquad S = \{x > -5\}$
3. $5^{x+3} < 2^x \cdot 8 \qquad S = \{x < -3\}$
4. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x+1} > 31 \quad S = \{x > 2\}$