# Disuguaglianze

Una disuguaglianza è una proposizione in cui compare uno dei predicati: “maggiore di”, “minore di”, “maggiore o uguale a”, “minore o uguale a”.

Sono disuguaglianze: $4<5$, $8<9$, $-5\leq 0$, $0 \geq -11$.

Ricordiamo alcune proprietà delle disuguaglianze

# Disequazioni di primo grado

### Definizione di disequazione

Una ***disequazione*** è una ***proposizione aperta*** in cui compare uno dei seguenti predicati:

“maggiore di” ( >)
“minore di” (<)
“maggiore o uguale a” (≥)
“minore o uguale a” (≤)

In generale a sinistra e a destra dei simboli di disuguaglianza può esserci qualunque espressione algebrica, noi per il momento studieremo solo disequazioni ad una incognita, cioè disequazioni in cui le due espressioni contengono la stessa variabile.

Ad esempio: se abbiamo le due espressioni algebriche in x: **$A(x)= x + 3$** e **$B(x)= 2 - 5x$**

Possiamo avere una delle seguenti disequazioni:

se il predicato è “maggiore di” si definisce la disequazione

$A(x) > B(x)$ ossia: $x+3 > 2-5x$

se il predicato è “minore di” si definisce la disequazione

$A(x) < B(x)$ ossia: $x+3 < 2-5x$

Analogamente con i predicati “maggiore o uguale a” (≥) e “minore o uguale a” (≤).

La disequazione è una disuguaglianza che è verificata per certi ***intervalli*** di valori.

Ad esempio la disequazione
$x - 4 \geq 0$

è verificata per tutti i valori della x maggiori di 4, cioè se al posto della x metto 5, 6, oppure 4,2 è vero che il primo termine della disuguaglianza è maggiore o uguale al secondo

### Definizione di soluzione

La **soluzione** di una disequazione in una variabile è l’insieme dei numeri che, sostituiti all’incognita, rende vera la disuguaglianza

---

***Risolvere*** una disequazione significa trovare gli intervalli dei valori che sostituiti alla x rendono la diseguaglianza vera

---

In una disequazione possiamo trovare solo i valori maggiori > oppure minori < di qualcosa oppure possiamo trovare i valori maggiori e uguali ≥ oppure minori e uguali ≤.

Occorre fare molta attenzione e considerare sempre se devo o no prendere il valore corrispondente all'uguale

---

Una disequazione si dice di **primo grado** quando la *x* vi compare a potenza 1

Ad esempio:
$x - 4 \geq 3x + 2$
e' una disequazione di primo grado

---

## Principi di equivalenza

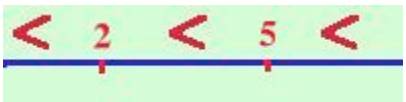
Per risolvere la disequazione valgono le stesse regole delle equazioni di primo grado con una grossissima differenza

**Se moltiplico o divido per un numero negativo devo cambiare di verso la disequazione**

Vediamo perché:

**Cambiamento di segno e verso nelle disequazioni**

Consideriamo la retta reale: su di essa possiamo sempre fissare un verso per cui i numeri a destra sono sempre superiori ai numeri a sinistra. Consideriamo ora due numeri qualunque, ad esempio 2 e 5




e la disuguaglianza corrispondente: $2 < 5$
Se moltiplico per -1, entrambi i membri, ottengo i due valori -2 e -5 che sulla retta reale sono così rappresentati:


e la disuguaglianza corrispondente è: $-2 > -5$
oppure in modo equivalente ( preferibilmente lungo la retta reale si cerca sempre di andare da sinistra verso destra cioe' scrivo prima i valori piu' piccoli poi il segno minore e infine i valori piu' grandi) $-5 < -2$

**Se moltiplico o divido per un numero negativo devo cambiare di verso la disequazione**

---

Porto le *x* prima dell'uguale ed i numeri dopo l'uguale; chi salta l'uguale cambia di segno.

$x - 3x \geq 2 + 4$ calcolo

$-2x \geq 6$ Divido entrambe i membri per -2 e ***contemporaneamente cambio*** di ***verso*** la disequazione.

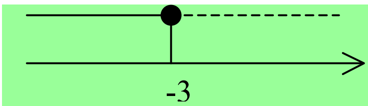
$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2}$ Semplifico

$x \leq -3$ Quindi la soluzione è l'insieme delle *x* minori od uguali a -3.

Si può indicare anche nei seguenti modi:

$$S = \{x \in \Re \mid x \leq -3\} \text{ oppure } \left]-\infty; -3\right]$$

oppure anche graficamente




Quest'ultimo metodo di solito è il più usato (quando anche il valore terminale è compreso vi si mette un tondino pieno, quando il valore non è compreso nell'intervallo si pone un tondino vuoto)

---

Vediamo ora insieme alcuni Esercizi

$x + 2 - 2x < 4x - 3 - 6x$ $\quad S = \{x \in \Re \mid x < -5\}$

$3x + 2 - 2x \leq 4x - 8$ $\quad S = \left\{x \in \Re \mid x \geq \frac{10}{3}\right\}$

$6x + 12 - 2x > 4x - 3$ $\quad S = \mathbb{R}$ oppure $\forall\ x \in \Re$

$\frac{x+2}{2} - 2x \geq \frac{4x+3}{3}$ $\quad S = \{x \in \Re \mid x \leq 0\}$

$(x+2)^2 - 2x < x^2 - 4x - 3$ $\quad S = \left\{x \in \Re \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$

# Segno di espressioni prodotto di due o più espressioni elementari

Vediamo di ragionare su un esempio pratico
Consideriamo un'espressione del tipo

$(x-2)(x-4)>0$

Essendo questa espressione prodotto di due termini sarà maggiore di zero quando i due termini che la compongono hanno lo stesso segno, cioè entrambe maggiori di zero oppure entrambi minori di zero. Quindi dovrei risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

Capisci che questo sarebbe un metodo molto pesante, soprattutto se invece del prodotto di due termini l'espressione fosse il prodotto di 3,4,5... termini.
Allora mettiamo in un grafico il segno di ognuno dei termini e poi scegliamo gli intervalli dove i segni sono concordi (entrambe positivi od entrambe negativi)

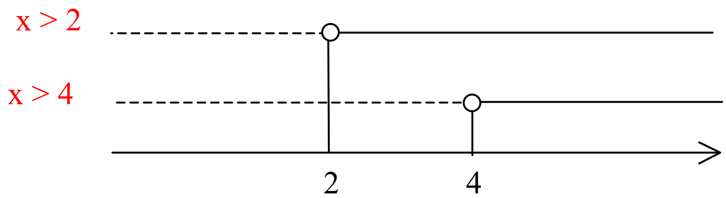
---

Poniamo sempre **tutti i fattori** componenti **maggiori di zero** per trovare i segni, indicando poi su un grafico dove sono positivi e dove negativi; poi se dovremo risolvere una disequazione positiva prenderemo gli intervalli dove il prodotto è positivo; se dobbiamo cercare dove la disequazione è negativa prenderemo gli intervalli dove il prodotto dei fattori diventa negativo

---

Risolvo la prima disequazione
$x - 2 > 0$ $\quad x > 2$ il primo fattore è positivo per *x* maggiore di due

Risolvo la seconda
$x - 4 > 0$ $\quad x > 4$ il secondo fattore è positivo per *x* maggiore di quattro
faccio lo schema:




Segno finale del prodotto: ++ +++ + + + + (2) - - - - - (4) + + + + + + + + +

L'espressione è positiva dove i due fattori sono entrambe positivi ed anche dove sono entrambe negativi, quindi avremo

$$x < 2 \ \mathrm{V} \ x > 4$$

in tal caso si intende positivo dove si indica con la linea intera e negativo ove la linea è tratteggiata.

---

Ricapitolando: Se devi risolvere una disequazione di grado superiore

- Devi scomporre la disequazione in prodotto di fattori di primo grado
- Poni tutti i fattori di primo grado maggiori di zero
- Costruisci un grafico dove metti tutti i valori positivi e negativi trovati
- In fondo al grafico fai il calcolo dei segni del prodotto fra i singoli fattori
- Se la disequazione è maggiore di zero consideri come soluzione i valori in cui il prodotto dei fattori è positivo

- Se la disequazione è minore di zero consideri come soluzione i valori in cui il prodotto dei fattori è negativo

---

Più avanti, quando avremo visto le regole per risolvere le disequazioni di secondo grado scomporremo le disequazioni di grado superiore come prodotto di fattori composti da equazioni (polinomi) sia di primo che di secondo grado

---